Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 12

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 15.01.18
Abgabe: Mo, 22.01.18
Besprechung: Fr, 26.01.18

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Energieerhaltung - Eindimensionales Potential **6P**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = V_0 \left[(1 - e^{-\alpha x})^2 - 1 \right] .$$

Bei $t = 0$ sei die Anfangsgeschwindigkeit negativ, $\dot{x}(0) = -\dot{x}_0$, und das Teilchen bei $x(0) = 0$.

(a) 1P Skizzieren Sie das Potential.

(b) 2P Im System stecke die Gesamtenergie E. Wie verläuft die Bewegung, wenn $-V_0 < E < 0$ gilt? Welche charakteristischen Bahnpunkte gibt es? *Hinweis:* Beachten Sie die Verwandtschaft mit Aufgabe 3 auf Blatt 10.

(c) 2P Entwickeln Sie das Potential bis zur zweiten Ordnung in eine Taylorreihe um $x = 0$. Berechnen Sie aus dem entwickelten Potential die Kraft und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Lösen Sie die DGL und ermitteln Sie die Oszillationsfrequenz.

(d) 1P Was passiert qualitativ für $E = 0$ oder $E > 0$?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator - Joileen-Paris im Kinderwagen **5P**

Die Halbschwester von Björn-Gonzales, Joileen-Paris, ist ein Schreihals und gibt in ihrem Kinderwagen nur Ruhe, wenn dieser in Schwingung bleibt. Kevin, der Vater von Joileen-Paris, hat daher den Kinderwagen an einer Achse über eine Stange an ein Schwungrad angeschlossen, das von seiner Bohrmaschine angetrieben wird. Die Frequenz Ω des Schwungrades kann er über ein Schraubzwinge steuern. Die Rückstellkraft der Federn des Kinderwagens ist proportional zur Auslenkung der Liegefläche in Bezug auf die Räder. Gleichzeitig ist die Bewegung mit $\frac{1}{2}\omega_0 \dot{x}$ gedämpft. So bleibt als eindimensionale Bewegungsgleichung von Joileen-Paris

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} e^{i\Omega t} .$$

(a) 2P Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL. Für die partikuläre Lösung bietet sich hier der Ansatz $Ce^{i\Omega t}$ mit $C = |C| e^{i\varphi}$ an, der eine Phasenverschiebung φ beinhaltet.

(b) 1P Kevin wählt $\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$ als Frequenz. Bestimmen Sie die Phase φ, die die Schwingung des Kinderwagens dem Schwungrad (nach dem Einschwingvorgang) hinterher ist.

(c) 2P Joileen-Paris kommen die sorgsam pürierten Makudonarudo Burger hoch, wenn die (reelle) Amplitude $|C|$ der Auslenkung des Kinderwagens zu stark ist. Bei welcher Resonanzfrequenz Ω_r ist die Amplitude maximal und welchen Wert hat die Amplitude dort? Fertigen Sie eine Zeichnung von $|C|$ als Funktion von Ω/ω_0 an (für $\frac{F}{m\omega_0^2} = 1$).

Aufgabe 3: Fouriertransformation - Einfache Beispiele $\boxed{\textbf{4P}}$

Wie in der Vorlesung angedeutet lassen sich viele physikalische Probleme im Fourierraum einfacher lösen. Die eindimensionale Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ der Funktion $f(x)$ sei gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \qquad \text{mit Rücktransformation} \qquad f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \,.$$

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 - 1 \geq 0 \\ x+1 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und fertigen Sie eine Skizze beider Funktionen $f(x)$ und $\tilde{f}(k)$ an.
Hinweis: Sie können $\tilde{f}(k)$ über den Kardinalsinus, $\mathrm{sinc}^2(\frac{k}{2})$, ausdrücken.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie $f(x)$ für $\tilde{f}(k) = e^{-\sigma|k|}$. Zeichnen Sie beide Funktionen für $\sigma = 1$.

Aufgabe 4: δ-Distribution - Darstellungen $\boxed{\textbf{5P}}$

Die Dirac'sche δ-Distribution ist definiert über die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \,.$$

Sie bildet damit eine (unendlich oft differenzierbare) Testfunktion $f(x)$ auf eine Zahl $f(0)$ ab. Ferner muss die Testfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$ und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) x^n = 0$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllen. Die δ-Distribution lässt sich nicht als gewöhnliche Funktion, aber über Funktionenfolgen darstellen.

(a) $\boxed{\text{4P}}$ Zwei Beispiele sind

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0^+} \delta_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-x^2/\sigma^2} \qquad \text{und} \qquad \delta(x) = \lim_{\sigma\to 0^+} \delta_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2+\sigma^2} \,.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/\sigma^2} f(x) = f(0) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sigma}{x^2+\sigma^2} f(x) = f(0) \,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor: Entwickeln Sie $f(x)$ um $x = 0$ bis zur ersten Ordnung und substituieren Sie $z = \frac{x}{\sigma}$. *Hinweise:* Ziehen Sie den Limes nicht in das Integral, die Operationen vertauschen hier nicht! Nutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \sqrt{\pi}$.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie mit der zweiten Darstellung aus (a) und dem Wissen aus Aufgabe 3, dass auch

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-\sigma|k|}$$

eine Darstellung von $\delta(x)$ ist.

Endlich das Theo-Blatt gelöst,
ich bin schon friedlich eingedöst,
da schreck'ich hoch, denn mir fällt auf:
Schon morgen kommt das Neue raus!

Die Blätter werden immer mehr,
Mir deut es ist doch allzu schwer.
Ich glaub' ich geb' mir heut' die Kante,
Verflucht sei Newtons G-Konstante!