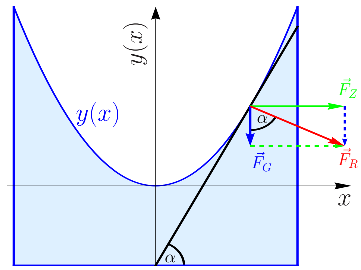
Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

## Aufgabe 1: Integration - Oberflächenprofil **3P**

Die Abbildung zeigt einen ebenen Schnitt durch die Symmetrieachse ($y(x)$) eines mit Wasser gefüllten zylindrischen Gefäßes, das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die Zylinderachse rotiert. Die Form des sich ergebenden Oberflächenprofils folgt aus der Kraft $\vec{F}_R$, welche sich aus Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$ und Gewichtskraft $\vec{F}_G$ ergibt. Diese resultierende Kraft $\vec{F}_R$ definiert die Oberflächenform dadurch, dass sie senkrecht zur Oberfläche stehen muss. Anderenfalls wirkt auf die Wassermoleküle an der Oberfläche eine Kraft, welche sie entlang der Oberfläche wandern lassen würde. Somit wäre die Oberflächenform instabil.




(a) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie den Tangens des Winkels $\alpha$, welcher sich aus der Länge der Vektoren $|\vec{F}_Z| = F_Z = m\omega^2 x$ und $|\vec{F}_G| = F_G = mg$ als Funktion von $g$, $\omega$ und $x$ ergibt.

(b) $\boxed{2P}$ Nun definiert der Winkel $\alpha$ auch die Steigung der gesuchten Kurve, genauer gilt $y' = \tan(\alpha)$. Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a) erhalten Sie daher eine Abhängigkeit $y'(x)$. Berechnen Sie $y(x)$ durch unbestimmte Integration und wählen Sie die Integrationskonstante $C$ geeignet (siehe Zeichnung).

## Aufgabe 2: Integration - Nicht die Mama **7P**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktionen

$$I_n(x) = \int_0^x dy y^n e^y \,,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist.

(a) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie $I_0(x)$.

(b) $\boxed{2P}$ Drücken Sie (für $n \geq 1$) $I_n(x)$ durch $I_{n-1}(x)$ aus. Eine solche Gleichung nennt man Rekursionsformel. *Hinweis*: Das Integral lädt zur Anwendung partieller Integration ein.

(c) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie $I_1(x), I_2(x)$ und $I_3(x)$.

(d) $\boxed{3P}$ Berechnen Sie $I_n(x)$, d.h. lösen Sie die Rekursion. *Hinweis*: Erraten Sie die Lösung für $I_n(x)$ und zeigen Sie, dass die Rekursionsformel erfüllt ist und $I_0(x)$ für $n = 0$ korrekt herauskommt. Die Beweismethode heißt vollständige Induktion.

## Aufgabe 3: Integration - Freier Fall $\boxed{\textbf{3P}}$

Berechnen Sie das Integral

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'}} \,,$$

indem Sie das Substitutionsverfahren nutzen. Substituieren Sie im ersten Versuch mit $u = 1 - x'$ und überprüfen Sie ihr Resultat durch einen zweiten Versuch unter Verwendung der Substitution $x' = \sin^2(\varphi)$.

*Hinweis:* Das Integral tritt in der Physik zum Beispiel beim freien Fall auf und folgt aus der Energieerhaltung $\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgx(t) = E$. Unter Beachtung von $v = \frac{dx}{dt}$ ergibt sich dort:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{mg}{E}x'}} \,.$$

## Aufgabe 4: Bahnkurve - Kardioide $\boxed{\textbf{7P}}$

Gegeben ist die Herzkurve oder Kardioide (im $\mathbb{R}^2$) in Parameterform

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)(1-\cos(t)) \\ \sin(t)(1-\cos(t)) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. *Hinweise:* Hilfreich sind $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ und $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie die Kurve. Wo könnte es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen geben?

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

(e) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

(f) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie die Länge der Kurve $s$ nach einem Umlauf, $0 \leq t \leq 2\pi$.
*Hinweis:* Motivieren Sie $s = \int_0^{2\pi} v(t)dt$ (ohne Bepunktung).
Nutzen Sie $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$ bei der Integration über $v(t)$.