

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)

Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

### Aufgabe 1: Bahnkurve - Verlorener Schuh

**5P**

Sie waren am letzten Wochenende auf der Mess' im Karussell. Dieses bestand aus einer Scheibe mit Radius  $R$ , die sich mit gewisser Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihren Mittelpunkt dreht. Sie nahmen im Abstand  $r < R$  Platz und verloren zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $\vec{r}(0) = (r, 0)^T$  Ihren Schuh, welcher reibungsfrei auf der glatten Oberfläche gleitet.

- (a) **2P** Ausgehend von Ihrer Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

stellen Sie die Bewegung des Schuhs  $\vec{r}_S(t)$  in kartesischen Koordinaten dar. Berechnen Sie für Ihre Bewegung den Tangenteneinheitsvektor und den Normaleneinheitsvektor.

- (b) **2P** Nun berücksichtigen wir einen Basiswechsel auf die soeben berechneten Einheitsvektoren, welche den Mittelpunkt des Karussells als Ursprung haben. Berechnen Sie in der neuen Basis  $\hat{\vec{r}}_S(t) = (\hat{x}_S(t), \hat{y}_S(t))$  für die Bewegung des Schuhs, indem Sie  $\hat{x}_S(t)\hat{\vec{r}}(t) + \hat{y}_S(t)\hat{\vec{n}}(t) = \vec{r}_S(t)$  lösen. Skizzieren Sie  $\hat{\vec{r}}_S(t)$  (für  $r = 1, \omega = 1$ ) in der neuen Basis.
- (c) **1P** Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Schuh auf der Oberfläche zurücklegt, als Funktion der Zeit. Arbeiten Sie also in der neuen Basis.

### Aufgabe 2: Drehungen - Nasse Hose

**3P**

Aus Ärger über den verlorenen Schuh und aus Verzweiflung über die Theorie A Übungen gingen Sie im Anschluss auf ein Bier in die Zähringer Straße 10. Sie erinnern sich, dass Sie einen nur wenig gefüllten Bierkrug in der Hand hielten. Anfänglich stand der Krug auf dem Tisch, also war die Krugachse ausgerichtet in  $z$ -Richtung. Die  $x$ -Achse war in Ihren Gedanken parallel zur Tischkante vor Ihnen, nach rechts orientiert, die  $y$ -Achse entsprechend von Ihnen weg.

- (a) **2P** Den Krug vom Tisch leicht anhebend drehten Sie ihn zuerst um einem Winkel  $\pi/6$  um die  $x$ -Achse, sodann um einen Winkel  $\pi/6$  um die  $y$ -Achse, im Anschluss um einen Winkel  $\pi/4$  um die  $x$ -Achse. Zuletzt legten Sie den Krug mit einer Drehung um  $\arctan \frac{1}{5}$  um die  $x$ -Achse auf dem Tisch ab. In welcher Richtung zeigt der Krug im kartesischen Koordinatensystem?  
*Hinweis:* Parametrisieren Sie den Bierkrug durch einen Einheitsvektor und wenden Sie auf diesen die Rotationsmatrizen aus der Vorlesung sukzessive an. Vermeiden Sie, wenn möglich, Dezimalzahlen.
- (b) **1P** Nach welcher Operation war die Hose nass? *Hinweis:* Der Krug läuft aus und damit das Bier vom Tisch, wenn der Winkel zwischen Krugachse und Tischoberfläche  $\pi/9$  unterschreitet. Bei dieser Aufgabe ist die Inkonsistenz (der Fragestellung) ausgeschlossen.

**Aufgabe 3: Matrizen - Gebrochener Arm****8P**

Mit einem Schuh und nasser Hose betreten Sie die Straßenbahn am Durlacher Tor. Beim Bremsmanöver am Kronenplatz verdrehen und stauchten Sie sich das Handgelenk. Neben Drehungen lassen sich auch Streckungen/Stauchungen und Spiegelungen als lineare Abbildungen auf Vektoren durch Matrizen darstellen. Die Drehung erfolgte um die  $x$ -Achse um den Winkel  $\pi/4$  und die Stauchung entlang der  $z$ -Achse um  $\frac{1}{2}$ . Diese schmerzhaften Operationen werden repräsentiert durch die Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) **1P** Die Matrix  $M = SD$  beschreibt eine Drehung mit anschließender Stauchung. Zeigen Sie, dass  $\det(M) = \det(S) \cdot \det(D)$  gilt.
- (b) **2P** Wie lautet die inverse Matrix  $M^{-1}$ ? *Hinweis:* Sie finden  $M^{-1}$ , indem Sie wie der Arzt im Krankenhaus vorgehen und Stauchung und Drehung rückgängig machen. Überprüfen Sie, dass die Matrix  $M^{-1}M$  die Einheitsmatrix ergibt.
- (c) **2P** Zeigen Sie, dass  $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$ . Zeigen Sie, dass auch  $\det(M^T) = \det(M)$  gilt. Was folgt daraus für die Determinante orthogonaler Matrizen? *Hinweis:* Eine reelle, quadratische Matrix  $O$  ist orthogonal, wenn  $O^T O$  die Einheitsmatrix ergibt.
- (d) **3P** Eine lineare Abbildung  $A$  heißt orientierungstreu, wenn  $\det(A) > 0$  gilt. Zeigen Sie, dass eine Abbildung, die durch eine orthogonale Matrix  $O$  dargestellt wird, längentreu ist, indem Sie das Skalarprodukt  $v'^T v'$  für  $v' = Ov$  betrachten. Sind eine Drehung um die  $z$ -Achse oder eine Stauchung orientierungstreu oder längentreu? Endlich zuhause betrachteten Sie sich im Spiegel. Wie lautet die Matrix für eine Spiegelung an der  $y$ - $z$ -Ebene? Ist diese orientierungstreu oder längentreu?

**Aufgabe 4: Matrizen - Kaputte Brille****4P**

Im Spiegelbild stellten Sie fest, dass Ihre Brille nur noch unter kleinen Winkeln ein scharfes Bild liefert. Offenbar funktioniert Ihre Brille nur noch in der Kleinwinkelnäherung  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ , eine Linearisierung, die die Anwendung von Matrizen erlaubt: Für Lichtstrahlen, die nur kleine Winkel mit der optischen Achse einschließen, lassen sich Brechungsgesetze dann durch lineare Abbildungen darstellen. Ein Strahl wird hierbei beschrieben durch den Vektor  $\vec{r} = (r, \alpha)^T$ , wobei  $r$  den Abstand zur optischen Achse und  $\alpha$  den Winkel zur optischen Achse angibt. Translation entlang der Strecke  $d$  und Brechung an einer dünnen Linse mit Brennweite  $f$  lassen sich dann durch

beschreiben.

$$T_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) **2P** Ein Strahl trifft unter dem Winkel  $\alpha$  im Abstand  $r$  zur optischen Achse auf eine dünne Linse mit Brennweite  $f$ . Welchen Winkel  $\alpha'$  und Abstand  $r'$  zur optischen Achse hat der Strahl im Abstand  $d$  hinter der Linse?
- (b) **2P** An welchem Punkt schneidet der Strahl die optische Achse hinter der Linse für  $\alpha = 0$ . Welches  $\vec{r}'$  erhält man für  $\alpha = \frac{r}{f}$ ?

Schlimmer geht immer. Das gilt auch für Theorie A Übungen.