Karlsruhe Institute of Technology

Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 5

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 13.11.17
Abgabe: Mo, 20.11.17
Besprechung: Fr, 24.11.17

Gesamtpunktzahl: $\boxed{\text{20P}}$

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Bahnkurve - Achterbahn $\boxed{\text{8P}}$

Inspiriert durch Ihren Besuch auf der 'Mess und Ihre Abneigung gegenüber Karussells steigen Sie ins Achterbahngeschäft ein. Der Antrieb der Achterbahn wird so gesteuert, dass sich folgende Bewegung ergibt: Zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$ befinde befinde sich der Wagen im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x–Richtung. Der Betrag der Beschleunigung $|\vec{a}| = a_0$ sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels einer Fahrt der Periodendauer T betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung a_v nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils $\vec{a}_h$ der Beschleunigung bilde mit der y–Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\varphi(t) = 4\pi t/T$. Die x–Komponente der Beschleunigung hat damit die Periode $T/2$ und sei negativ für $0 < t < T/4$. Zur Zeit $t = t' + T/2$ hat die y–Komponente das umgekehrte Vorzeichen wie zur Zeit t'.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Geben Sie den Vektor der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ an. Verwenden Sie a_v, a_h und T als Parameter. Nutzen Sie $\omega = 4\pi/T$ im Argument der trigonometrischen Funktionen.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Funktion der Zeit. Verwenden Sie v_0, a_v, a_h, T und ω als Parameter.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Geben Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie wieder v_0, a_v, a_h, T und ω als Parameter.

(d) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie die Achterbahn einmal in der Draufsicht (x–y–Ebene) und einmal in der Seitenansicht (y–z–Ebene).

Aufgabe 2: Bahnkurve - Wasserstrahl $\boxed{\text{4P}}$

Erinnern Sie sich an die Aufgabe 2 von Blatt 1, bei der es darum ging die Höhe eines Wasserstrahls an einer Hauswand zu maximieren. Dazu verlässt der Strahl den Feuerwehrschlauch mit Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α zum Boden.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Wir betrachten wieder das zweidimensionale Koordinatensystem mit dem Austrittsort des Strahls im Koordinatenursprung. Leiten Sie ausgehend von der Fallbeschleunigung $\vec{a} = -g\vec{e}_y$ die Bahnkurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ unter Berücksichtigung von v_0 erneut ab.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Ermitteln Sie die Zeit T, zu welcher ein Wassermolekül des Wasserstrahls auf freiem Feld wieder den Boden erreicht, also $y(T) = 0$ gilt.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Ermitteln Sie die Länge des zurückgelegten Weges L eines Wassermoleküls, wenn es zur Zeit T den Boden wieder erreicht. *Hinweis:* Substituieren Sie zuerst so, dass Sie ein Integral mit Integrand $\sqrt{1 + z^2}$ erhalten und denken Sie dann an Blatt 3, Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Differentiation - Partielle Ableitungen $\boxed{2\text{P}}$

Gegeben ist die Funktion $F(\lambda, \omega, t) = e^{-\lambda t} \cos \omega t$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial \omega} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \lambda}$$

und zeigen Sie, dass es bei den zweiten Ableitungen auf die Reihenfolge der Differentiation nicht ankommt.

Aufgabe 4: Kugelkoordinaten - Einheitsvektoren $\boxed{6\text{P}}$

In kartesischen Koordinaten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$ ausgedrückt durch Kugelkoordinaten r, θ und ϕ

$$\vec{r}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

(a) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_\theta$, indem Sie wie folgt vorgehen: Durch Festhalten zweier Kugelkoordinaten und partiellem Ableiten nach der jeweils dritten Koordinate erhalten Sie die Koordinatenlinie der dritten Koordinate. Die Einheitsvektoren sind die Tangenteneinheitsvektoren entlang der Koordinatenlinien.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_\theta$ orthogonal aufeinander stehen.

(c) $\boxed{1\text{P}}$ Wie lautet die Transformationsmatrix von einem Vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$ in kartesischen Koordinaten auf den Vektor ausgedrückt in Kugelkoordinaten $\vec{k}' = (k_r, k_\theta, k_\phi)^T$? *Hinweis:* Arbeiten Sie mit $k_r \vec{e}_r + k_\theta \vec{e}_\theta + k_\phi \vec{e}_\phi$ in kartesischen Koordinaten. Bestimmen Sie zuerst die inverse Matrix. Die Matrix ist orthogonal.

(d) $\boxed{2\text{P}}$ Zeigen Sie ausgehend von einem zeitabhängigen Ortsvektor beginnend im Ursprung $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$, dass die Geschwindigkeit gegeben ist durch

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\phi \quad .$$

Hinweis: Berechnen Sie die Zeitableitung von $\vec{e}_r$ und betrachten Sie r, θ und ϕ als zeitabhängige Größen.