Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 6

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 20.11.17
Abgabe: Mo, 27.11.17
Besprechung: Fr, 01.12.17

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Auch wenn dieses Blatt neue Konzepte enthält, sei darauf verwiesen, dass alle Teilaufgaben in wenigen Zeilen zu lösen sind. Hinweise zu Differentialgleichungen werden auch in der Saalübung gegeben. Blatt 7 wird von einfacher Natur, um nochmal ein paar Punkte einzusammeln.

Aufgabe 1: Differentialgleichung - Separation der Variablen **6P**

Mit den Newtonschen Axiomen treten erstmals Differentialgleichungen in Form von Bewegungsgleichungen auf. Mit der Lösung derselben lassen sich ganze Vorlesungen füllen, daher fangen wir einfach an: Wir betrachten zuerst eine gewöhnliche (d.h. nur von einem Parameter x abhängige) Differentialgleichung (DGL) erster Ordnung (d.h. nur die erste Ableitung nach x tritt auf) der Form

$$g(y(x))y'(x) = f(x) \quad \text{mit} \quad y'(x) = \tfrac{dy(x)}{dx}\,.$$

Lösung der DGL bedeutet die Ermittlung der Funktion $y(x)$ unter Beachtung eines bestimmten Anfangswertes $y(x_0) = y_0$ (Anfangswertproblem).

(a) **2P** Begründen Sie, dass eine Lösung obiger DGL gegeben ist durch

$$G(y) = F(x) + C \quad \text{und damit} \quad y(x) = G^{-1}(F(x) + C)\,,$$

wobei G und F Stammfunktionen von g und f sind. C ist eine beliebige Integrationskonstante. *Hinweis:* Es benötigt keinen mathematischen Beweis. Erläutern Sie in zwei Sätzen den Zusammenhang zur Kettenregel.

(b) **2P** Bestimmen Sie die Lösung für den konkreten Fall der DGL $y'(x) = -xy(x)$ für den Anfangswert $y(1) = 2$. *Hinweis:* Bringen Sie die Gleichung erst auf obige Form. Schreiben Sie $\ln|y|$ und hängen Sie sich nicht an mathematischen Feinheiten auf.

(c) **2P** Für gewöhnliche DGLen erster Ordnung lässt sich ein Richtungsfeld zeichnen, indem man in der $x-y$-Ebene für ausgewählte Punkte einen Pfeil mit der zugehörigen Steigung $y'(x)$ zeichnet. Skizzieren Sie das Richtungsfeld für die DGL $y'(x) = -xy(x)$ für ganzzahlige Punkte (x, y) mit $x \in [-3, 3]$ und $y \in [-3, 3]$ in der $x-y$-Ebene. Zeichnen Sie auch die Lösung der vorherigen Teilaufgabe ein.

Aufgabe 2: Newtonsche Axiome - Raketenantrieb **5P**

Wir möchten das soeben erworbene Wissen sofort anwenden und betrachten eine Rakete. Eine Rakete wird durch den Rückstoß der ausströmenden Materie angetrieben. Die Masse der Rakete nimmt dabei mit der gleichen Rate ab, mit der Materie ausgestoßen wird, wir nehmen daher $m(t) = m_0 - \alpha t$ an. m_R sei das Eigengewicht der Rakete, m_0 sei die Gesamtmasse inkl. Treibstoff. Die Geschwindigkeit der ausströmenden Materie betrage v_0 (relativ zur Rakete).

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Wir betrachten das System eindimensional und nehmen zuerst an, dass auf die Rakete keine äußeren Kräfte wirken. Dann gilt Impulserhaltung und somit die DGL

$$\frac{dp}{dt} = 0 = \frac{dm}{dt} v_0 + m \frac{dv}{dt} \,. \quad \text{Dies führt auf} \quad \frac{dv}{dm} = -\frac{v_0}{m} \,.$$

Erläutern Sie die Physik letzterer DGL in zwei Sätzen. Lösen Sie die DGL durch Separation der Variablen unter Beachtung von $v(m_0) = 0$.
Hinweis: Sie sollten $v = -v_0 \ln(m/m_0)$ und damit $v(t) = -v_0 \ln(m(t)/m_0)$ erhalten.

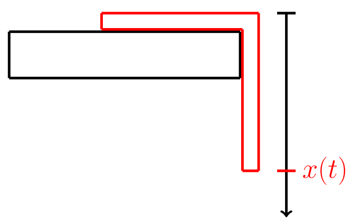
(b) $\boxed{\text{3P}}$ Berechnen Sie aus der Geschwindigkeit $v(t)$ der vorherigen Teilaufgabe die Beschleunigung $a(t)$, und addieren Sie zu dieser die Fallbeschleunigung als äußere Kraft, d.h. $\hat{a}(t) = a(t) - g$. Offensichtlich hebt die Rakete ab, wenn $\hat{a}(t) > 0$. Bestimmen Sie den Zeitpunkt T, zu welchem $\hat{a}(T) = 0$. Für welche Parameterkombination hebt die Rakete sofort ab? Für welche Parameterkombination hebt die Rakete nie ab? Man beachte, dass die Zeit T einen Maximalwert hat, nämlich dann wenn der Treibstoff aufgebraucht ist.

Aufgabe 3: Differentialgleichung - Konstante Koeffizienten $\boxed{\text{4P}}$

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer anderen Klasse von DGLen, den gewöhnlichen, linearen (d.h. alle Ableitungen treten linear auf) DGLen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese sind von der Form $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) + b(x) = 0$. Die Koeffizienten a_i sind konstant, wobei die Gleichung mit $b(x) = 0$ homogene Gleichung genannt wird. Zeigen Sie konkret für die homogene DGL $y''(x) + 5y'(x) + 6y = 0$, dass der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ auf eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen $\lambda_{1,2}$ führt. Machen Sie den Ansatz $y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, und bestimmen Sie A und B für die Anfangswerte $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$. Setzen Sie zur Überprüfung Ihre Lösung in die DGL ein.

Aufgabe 4: Newtonsche Axiome - Seil über Tischkante $\boxed{\text{5P}}$

Ein Seil der Länge l und Masse m gleite über die Tischkante reibungsfrei ab, wobei es anfänglich mit der Länge x_0 über die Tischkante hänge. Es wirkt die Gewichtskraft auf den nach unten hängenden Teil des Seiles. Die Dicke des Seiles sei vernachlässigbar, und die Biegung des Seils sei widerstandsfrei.



(a) $\boxed{\text{3P}}$ Parametrisieren Sie die Masse $m(t)$ des nach unten hängenden Teiles als Funktion von $x(t)$ und zeigen Sie, dass für die Gewichtskraft $F(t) = m\frac{g}{l}x(t)$ gilt. Zeigen Sie, dass dies auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = \frac{g}{l} x(t)$$

führt. Lösen Sie die Gleichung mit einem Ansatz wie aus vorheriger Aufgabe unter den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. *Hinweis:* Sie erhalten, mal wieder, die hyperbolischen Funktionen. Man beachte, dass die beschleunigte Masse m im Gegensatz zur Raketenaufgabe zeitlich konstant ist.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Seils im Moment in dem es über die Kante rutscht, also $x(T) = l$ ist, gegeben ist durch $\dot{x}(T) = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{l^2 - x_0^2}$. *Hinweis:* Nutzen Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, um die hyperbolischen Funktionen zu eliminieren.