Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Kreativität - Gedicht **3P**

Schreiben Sie einen Reim (Zwei- bis Vierzeiler), der Ihre Haltung (positiv wie negativ!) zur Theorie A zum Ausdruck bringt! Wir behalten uns vor, gute wie schlechte Ausführungen auf zukünftigen Blättern anonymisiert zu präsentieren. *Hinweis:* In den nächsten Wochen erfolgt die offizielle anonyme Vorlesungsumfrage, die mit dieser Aufgabe nichts am Hut hat.

Aufgabe 2: Differentialgleichung - Gravitation **5P**

Wir betrachten die Gravitationskraft in einem eindimensionalen System. Eine Punktmasse m am Ort a werde von einer im Ursprung fixierten Masse M mit der Kraft

$$F(x) = -GmM\frac{1}{x^2}$$

angezogen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhe die Punktmasse.

(a) 1P Geben Sie die Bewegungsgleichung der Punktmasse an.

(b) 1P Zeigen Sie, dass dies auf $\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\dot{x}^2] = \frac{d}{dt}[-GM\frac{1}{x}]$.
führt und integrieren Sie beide Seiten über die Zeit. *Hinweis:* Diese Beziehung läuft uns später als Energiesatz wieder über den Weg.

(c) 3P Lösen Sie die verbliebene DGL der Form $\dot{x}(t) = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$ durch Separation der Variablen und bestimmen Sie die Zeit T, zu welcher die beiden Massen zusammenprallen, also $x(T) = 0$ ist.

Aufgabe 3: Inertialsysteme - Transformationen zwischen Bezugssystemen **5P**

Ein Massenpunkt bewege sich in einem Inertialsystem auf der Bahnkurve $\vec{r}(t) = v_x t\vec{e}_x + z_0\vec{e}_z$ ausgedrückt in kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Bahnkurve in nachfolgenden Bezugssystemen B und begründen Sie, welche der Systeme Inertialsysteme sind:

(a) 1P B_a sei um $y_0\vec{e}_y$ gegenüber dem Ursprungssystem verschoben.
Hinweis: Der Koordinatenursprung von B_a liegt im Ursprungssystem also bei $y_0\vec{e}_y$.

(b) 1P B_b sei um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ um die y-Achse gegenüber dem Ursprungssystem gedreht.
Hinweis: Führen Sie bei Drehungen neue Einheitsvektoren ein, hier z.B. $\vec{e}'_x = -\vec{e}_z$, etc..

(c) 1P B_c sei um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die x-Achse gegenüber dem Ursprungssystem gedreht.

(d) 1P B_d bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v_z\vec{e}_z$ gegenüber dem Ursprungssystem und falle zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Ursprungssystem zusammen.

(e) $\boxed{\text{1P}}$ B_e bewege sich mit konstanter Beschleunigung $a(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ gegenüber dem Ursprungssystem und falle mit diesem zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammen. Auch die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme verschwinde zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabe 4: Inertialsysteme - Gruppentheorie $\boxed{\textbf{4P}}$

Gegeben sei eine eigentliche, orthochrone Galilei-Transformation durch die Abbildung

$$g : \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vec{r}\,' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}\vec{r} - \vec{v}t - \vec{a} \\ t + b \end{pmatrix},$$

wobei A eine orthogonale, konstante Matrix ist. Der Vektor $\vec{v}$ bezeichnet eine konstante Geschwindgikeit und $\vec{a}$ sowie b seien konstante Verschiebungen in Raum bzw. Zeit. Die Menge aller Abbildungen lässt sich durch die Elemente $g = g(A^{-1}, \vec{v}, \vec{a}, b)$ beschreiben. Wir wollen zeigen, dass die Menge aller eigentlichen, orthochronen Galilei-Transformationen eine Gruppe G bilden.
Hinweis: In der Physik basiert vieles auf Symmetrien und Symmetrien auf Gruppentheorie, siehe Saalübung diese Woche.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie, dass die Ausführung von zwei beliebigen Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation ergibt, und bestimmen Sie die Parameter dieser Transformation in Abhängigkeit der Parameter der ursprünglichen Transformationen. Spielt die Reihenfolge der Ausführung eine Rolle?

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Man definiert die Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen durch

$$g' = g_2 \circ g_1 = g_2(A_2^{-1}, \vec{v}_2, \vec{a}_2, b_2) g_1(A_1^{-1}, \vec{v}_1, \vec{a}_1, b_1)\,.$$

Zeigen Sie die Gruppeneigenschaften:
(i) Die Verknüpfungsoperation ist assoziativ, d.h. $g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$.
Hinweis: Zur Erleichterung zeigen Sie Assoziativität nur für den Spezialfall $b_i = \vec{a}_i = 0$.
(ii) Es existiert ein neutrales Element, so dass für jede Transformation $g \in G$ gilt: $g \circ E = E \circ g = g$. *Hinweis:* Die Frage ist also: Wie lautet E?
(iii) Zu jedem Gruppenelement $g \in G$ gibt es eine inverse Transformation g^{-1}, so dass gilt: $g \circ g^{-1} = E$. *Hinweis:* Wie lautet g^{-1}?

Aufgabe 5: Scheinkräfte - Eiffelturm $\boxed{\textbf{3P}}$

An der Spitze des Eiffelturms in Paris (Höhe $h = 300\,\text{m}$) ist ein Lot aufgehängt, das mit seiner Spitze den Boden im Punkt P berührt. O sei der Bodenpunkt, der auf der Verbindungslinie von der Turmspitze zum Erdmittelpunkt liegt. Der Erdradius sei R, die Erdachse sei $\vec{\omega}$ mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}| = 2\pi f$, und β sei der Breitengrad von Paris. Wie weit ist P von O entfernt und in welche Richtung ist P gegenüber O verschoben? *Hinweis:* Legen Sie das lokale Koordinatensystem wie nebenstehend gezeigt. Drücken Sie zuerst den Betrag der Zentrifugalbeschleunigung durch ω, R und β aus.
Zahlenwerte: $R \approx 6.34 \cdot 10^6\,\text{m} \gg h$, $\beta \approx 49°$, $f = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s}}$