Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan R. Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Saalübung: Max K. Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Sonderregelung Vorleistung/Klauszurzulassung: Student(inn)en, die auf Blatt 1-7 $(50\% - x)$ der Punkte mit $x \in [0\%, 15\%] \geq 0$ erreicht haben, können die Klausurzulassung noch erlangen, indem sie auf Blatt 8-14 mindestens $(50\% + x)$ der Punkte erhalten!

Aufgabe 1: Scheinkräfte - Eiffelturm 2. Teil — 5P

Im zweiten Teil der Aufgabe lassen wir einen Körper von der Turmspitze des Eiffelturms in Paris (Höhe $h = 300\,\text{m}$) frei fallen. Wieder sei der Erdradius R, die Erdachse sei $\vec{\omega}$ mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}| = 2\pi f$, und β sei der Breitengrad von Paris. Der Körper erfahre während des Falls keine Reibungskräfte, falle also idealisiert im Vakuum. O sei wieder der Bodenpunkt, der auf der Verbindungslinie von der Turmspitze zum Erdmittelpunkt liegt.

(a) **2P** Stellen Sie für den frei fallenden Körper die Bewegungsgleichungen in x, y und z-Richtung des lokalen Koordinatensystems (siehe Blatt 7, Aufgabe 5, Zeichnung) auf. *Hinweis:* Berücksichtigen Sie in der Coriolisbeschleunigung $\vec{b}_c$ nur die v_z-Komponente der Geschwindigkeit des Körpers. Die Zentrifugalbeschleunigung ist gemäß des letzten Übungsblattes $\vec{b}_s = \omega^2 R \cos\beta(\sin\beta, 0, \cos\beta)^T$.

(b) **3P** In welcher Richtung und Entfernung vom Punkt O trifft ein von der Turmspitze aus losgelassener frei fallender Körper auf dem Boden auf? *Hinweis:* Lösen Sie zuerst die Gleichung für z und bestimmen Sie so $v_z(t)$. $R \approx 6.34 \cdot 10^6\,\text{m}$, $\beta \approx 49°$, $f = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s}}$

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz, Rotation - Rainer und Klaus — 9P

In der Vorlesung wurden der Gradient, die Divergenz und die Rotation für skalare und vektorwertige Felder im $\mathbb{R}^3$ eingeführt. Nachfolgend wollen wir anhand konkreter Beispiele die Operatoren besser verstehen. In der gesamten Aufgabe ist $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und $r = |\vec{r}|$.

(a) **3P** Wir untersuchen zwei skalare Felder

$$\phi_1(\vec{r}) = e^{-r^2}\,, \qquad \phi_2(\vec{r}) = \frac{x}{r^2 + a^2} \quad (a = \text{const})\,.$$

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$. Skizzieren sie das kugelsymmetrische Feld $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$ kann als Summe $\alpha(\vec{r})\vec{e}_x + \beta(\vec{r})\vec{r}$ geschrieben werden. Skizzieren Sie die beiden Teilfelder in der x–y–Ebene.

(b) **2P** Fisch Rainer mag keinen Strudel in seinem Becken. Ihm wird instantan schlecht, wenn die Geschwindigkeitsfelder des Wassers nicht wirbelfrei sind ($\vec{\nabla} \times \vec{v}_i(\vec{r}) \neq 0$). Untersuchen Sie ob sich Rainer für die Geschwindigkeitsfelder

$$\vec{v}_1(\vec{r}) = (0, x, 0)^T\,, \qquad \vec{v}_2(\vec{r}) = (0, \sin y, 0)^T\,, \qquad \vec{v}_3(\vec{r}) = (yz, xz, xy)^T$$

übergeben muss. Zeichnen Sie auch die Geschwindigkeitsfelder $\vec{v}_1(\vec{r})$ und $\vec{v}_2(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. Berechnen Sie die Divergenzen $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i(\vec{r})$. Welches Geschwindigkeitsfeld ist in

Wasser realisierbar? Nur $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i(\vec{r}) = 0$ garantiert "Volumenerhaltung"/Quellenfreiheit, also in ein beliebiges Volumen geflossenes Wasser fließt an anderer Stelle wieder heraus (Gaußscher Integralsatz).
Hinweis: Immer wenn die kleinen Fische unter den Eskapaden von Rainer leiden, tauscht Klaus das Wasser, aber keiner wäscht Rainer das Gehirn.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und Skalarfelder $\phi(\vec{r})$ gilt

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) = 0\,, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = 0\,.$$

Gemäß zweiter Aussage sind Felder, die aus einem Skalarfeld (Potential) über den Gradient gewonnen werden, wirbelfrei. *Hinweis:* Diese Aufgabe ist einfacher mit Indexschreibweise, z.B. $(\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\nabla_j A_k$. Zweite partielle Ableitungen seien vertauschbar.

(d) $\boxed{\text{2P}}$ Dreht man den Spieß um, so kann man fragen ob für nachfolgende vektorwertige Felder ein skalares Feld (Potential) exisitert, so dass $\vec{F}_i(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi_i(\vec{r})$ gilt. Falls existent, ermitteln Sie $\phi_i(\vec{r})$ bis auf eine Konstante für die Fälle

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\,, \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = xy\vec{e}_x + xy\vec{e}_y\,, \qquad \vec{F}_3(\vec{r}) = (x^2+y^2)\vec{e}_x + 2xy\vec{e}_y\,.$$

Hinweis: Das Minuszeichen ist in Anlehnung an den Zusammenhang zwischen Potentialen und Kraftfeldern gewählt. Berechnen Sie zuerst $\vec{\nabla} \times \vec{F}_i(\vec{r})$ und betrachten Sie die vorherige Teilaufgabe um etwas zur Existenz von $\phi_i(\vec{r})$ zu sagen.

Aufgabe 3: Wegintegral - Satz von Stokes $\boxed{\textbf{6P}}$

Der Satz von Stokes erleichtert die Berechnung eines Flächenintegrals durch Überführung in ein Linien/Wegintegral. Für ein vektorwertiges Feld $\vec{F}$ lautet er

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}\,. \tag{1}$$

Hierbei ist A eine gerichtete Fläche und $\vec{A}$ ein Vektor, welcher senkrecht auf der Fläche steht. ∂A ist die Umrandung der Fläche und $\vec{s}$ eine Parametrisierung derselben. Sie dürfen für das konkrete Beispiel

$$\vec{F}(\vec{r}) = (-y, x, x^2 + y^2 - z^2)^T$$

den Satz von Stokes überprüfen, indem Sie beide Seiten getrennt in mehreren Schritten berechnen. Die Fläche A sei eine Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius R in der x–y–Ebene.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Berechnen Sie zuerst den Flächeninhalt $\int_{x^2+y^2 \leq R^2} dxdy$ von A, indem Sie von kartesischen zu Polarkoordinaten wechseln. *Hinweis:* Sie benötigen die Jacobi-Determinante gemäß des Vorlesungsskriptes.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie nun die linke Seite von Gl. 1, indem Sie $d\vec{A} = (0, 0, dxdy)^T$ setzen und die vorherige Teilaufgabe nutzen.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Für die rechte Seite von Gl. 1 benötigen Sie eine Parametrisierung des Weges entlang des Randes ∂A. Parametrisieren Sie den Weg mit einer Bahnkurve $\vec{s}(t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

(d) $\boxed{\text{2P}}$ Drücken Sie nun $\vec{F}$ in der x–y–Ebene durch Polarkoordinaten aus ($z = 0$) und substituieren Sie $d\vec{s} = \dot{\vec{s}}dt$. Damit können Sie die rechte Seite als eindimensionales Integral über t berechnen. Sie sollten Identisches zur linken Seite erhalten.