Wintersemester 2017/18
Theorie A - Blatt 9

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. S. Liebler

Ausgabe: Mo, 11.12.17
Abgabe: Mo, 18.12.17
Besprechung: Fr, 22.12.17

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum: 12/03)
Beratungstutorium: Max Stadelmaier (maximilian.stadelmaier@student.kit.edu) (Raum: 12/12)

Aufgabe 1: Scheinkräfte - Björn-Gonzales und der Apfel von Newton **5P**

Ein Apfel fällt senkrecht in einem homogenen Gravitationsfeld auf ein Kinderkarussell, auf dem Björn-Gonzales seine Runden dreht. Björn-Gonzales mag keine Äpfel. Der Apfel hänge anfänglich in Ruhe in einer Höhe h über der Karussellscheibe, bei radialem Abstand R zum Zentrum der Scheibe. Auch Björn-Gonzales sitze im Abstand R. Die Scheibe rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_0$ um die z-Achse.

(a) 2P Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Koordinatensystem, welches fest mit dem Karussell verbunden ist.
Hinweis: Die Teilaufgaben sind in Zylinderkoordinaten $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$ zu bearbeiten. Für die Geschwindigkeit sei auf Kapitel 2.3.4 der Vorlesung verwiesen, die Beschleunigung ist gegeben durch $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z$. Setzen Sie die Größen in die Bewegungsgleichung mit Scheinkräften Gl. (4.27) der Vorlesung ein. Sortieren Sie nach den Einheitsvektoren.

(b) 3P Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und berechnen Sie die Zeit T und den Ort (ρ, ϕ) des Aufpralls. Wo muss sich Björn-Gonzales zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden, damit ihm der Apfel auf den Kopf fällt? *Hinweis:* Björn-Gonzales ist eher breit als hoch, vernachlässigen Sie seine Körpergröße gegenüber h. Die Anfangsbedingungen sind $\dot{\rho}(0) = 0$ und $\dot{\phi}(0) = -\omega_0$. Lösen Sie zuerst die $\vec{e}_z$-Gleichung, dann die $\vec{e}_\phi$-Gleichung durch einen ähnlichen Trick wie bei Aufgabe 2, Blatt 7.

(c) 0P *Ohne Bepunktung:* Der Vater von Björn-Gonzales, Manfred, setzt zum Zeitpunkt $t = 0$ seinen Motorroller am Karussel an und beschleunigt es so, dass $\vec{\omega}(t) = \vec{\alpha}t + \vec{\omega}_0$ gilt. Nehmen Sie auch die Azimuthalkraft mit in die Bewegungsgleichungen auf. Zeigen Sie, dass $\phi(t) = -\omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ die $\vec{e}_\phi$-Gleichung löst. Wie muss Manfred am Gashahn drehen $(\alpha = |\vec{\alpha}|)$, damit der Apfel Björn-Gonzales eine Umdrehung später trifft?

Aufgabe 2: Äquipotentiallinien - Higgs-Potential **4P**

Gegeben sei das aus der Teilchenphysik unter dem Namen Higgs-Potential bekannte skalare Potential $V(x, y) = -\alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2)^2$ als Funktion zweier Parameter.

(a) 2P Skizzieren Sie in der x–y–Ebene für $\alpha = 3$ und $\beta = 0.3$ die Äquipotentiallinien $V(x, y) = -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ im Wertebereich $x, y \in [-2, 2]$. *Hinweis:* Machen Sie sich erst die Symmetrie des Problems klar. Welche Koordinaten sind zur Beschreibung gut geeignet?

(b) 2P Berechnen Sie den negativen Gradienten (in zwei Dimensionen $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$) des Potentials. Wie schaut das zugehörige Vektorfeld aus? In welche Richtung zeigen die Vektorpfeile des Gradientenfeldes und wie stehen sie in Bezug auf die Äquipotentiallinien?

Aufgabe 3: Wegintegral - Konservatives Kraftfeld $\boxed{\textbf{5P}}$

Gegeben sei ein konservatives Kraftfeld in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (x + 1, z^2, 2yz)^T .$$

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie, dass die Rotation verschwindet.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Es existiert ein Potential $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Ermitteln Sie $V(\vec{r})$. Berechnen Sie den Potentialunterschied zwischen $\vec{r}_1 = (4, 0, 0)^T$ und $\vec{r}_2 = (0, 0, 4)^T$.

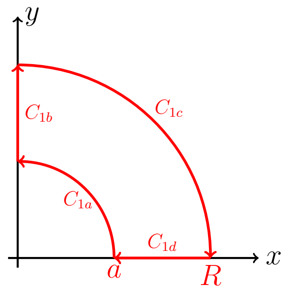
(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die verrichtete Arbeit $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang einer Gerade von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ und zeigen Sie, dass diese gerade dem Potentialunterschied aus (b) entspricht. *Hinweis:* Es braucht wieder eine Parametrisierung $\vec{s}(t)$ des Weges.

Aufgabe 4: Wegintegral - Frechheit $\boxed{\textbf{6P}}$

Gegeben sei ein Kraftfeld in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)^T .$$

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Zeichnen Sie das Kraftfeld in der x–y–Ebene. Können Sie dem Ursprung einen Vektor zuordnen? Berechnen Sie die Rotation.



(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang des nebenstehenden Ringsegmentes C_1 im Uhrzeigersinn. Trifft dies ihre Erwartung entsprechend des Satzes von Stokes? *Hinweis:* Parametrisieren Sie das Ringsegment durch vier Parametrisierungen C_{1i} und addieren Sie die Ergebnisse. Je nach Wegstück bieten sich mal kartesische, mal Polarkoordinaten an.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang eines Kreises C_2 in der x–y–Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung gegen den Uhrzeigersinn. *Ohne Bepunktung:* Was läuft hier vermutlich schief?

Der Physikstudent:
Wer poltert so laut in tiefster Nacht?
Ein einsamer Student, der Theo-A Blätter macht.
Man hört, wie er wieder und wieder zu sich spricht:
"Siehst du Neandertaler die Lösung denn nicht?"
Seit Tagen wälzt er die Bücher her und hin,
durchforstet das Internet, doch noch immer erschließt sich kein Sinn.
Schon dämmert der Montag, doch Aufgeben - keine Option,
man will schließlich ernten - der Mühe Lohn.
Endlich fertig, nun schnell - man erreicht den Kasten mit Müh und Not,
Freitag (8:00Uhr) - man bekommt das Blatt zurück, ein (Alp)traum in rot.

Theo kann ich morgen machen,
wer glaubt bitte solche Sachen?
Was hab' ich mir bloß gedacht?
Tschüss sag' ich zu meiner Nacht.

Einst war ich Fan der Theorie
und schoss mir damit selbst ins Knie.
Ich kam, ich sah und ich erkannte,
dass mich die Mathematik überrannte.