

Aufgabe 1: Verständnisfragen und kleine Aufgaben**36P**

Beantworten Sie die Fragen kurz, aber vollständig.

- (a)
- 4P**
- Berechnen Sie die Taylorreihe von
- $f(x) = \sin(x^2)$
- um
- $x_0 = 0$
- bis (inklusive) zur zweiten Ordnung
- $(x - x_0)^2$
- .

- (b)
- 5P**
- Gegeben sei die Matrix
- $$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\det(M)$, sowie die Determinante der inversen Matrix $\det(M^{-1})$. Geben Sie des Weiteren das Matrixprodukt MM^T an. Um welchen Typ einer Matrix handelt es sich?

- (c)
- 6P**
- Welche physikalische Bedeutung haben die einzelnen Terme der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$
- (
- $\gamma > 0$
-) (in Stichworten)? Beschreiben Sie die möglichen Bewegungen des harmonischen Oszillators in Abhängigkeit von
- γ
- und
- ω_0
- , indem Sie die homogene Gleichung lösen.
-
- (d)
- 5P**
- Benennen Sie die 10 freien Parameter einer Galilei-Transformation.
-
- (e)
- 5P**
- Bestimmen Sie für das Geschwindigkeitsfeld in Wasser (
- $\vec{r} = (x, y, z)^T$
-)

$$\vec{v}(\vec{r}) = (\alpha xy - z^3, (\alpha - 2)x^2, (1 - \alpha)xz^2)^T$$

die Konstante α so, dass das Feld wirbelfrei ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$) ist. Ist es dann auch quellenfrei?

- (f)
- 5P**
- Ein Raumschiff der Masse
- m
- falle reibungsfrei radial in Richtung Erde mit Masse
- M
- . Die Gravitationskraft betrage
- $F(r) = -GMm\frac{1}{r^2}$
- . Geben Sie die Bewegungsgleichung
- $r(t)$
- an und leiten Sie durch Multiplikation beider Seiten mit
- $\dot{r}(t)$
- und Integration den Energieerhaltungssatz (
- $E = 0$
-) her. Identifizieren Sie das Gravitationspotential
- $V(r)$
- .
-
- (g)
- 6P**
- Sie haben in den Übungen für die Differentialgleichung
- $\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)y(x) = f(x)$
- die Green-Funktion
- $G(x) = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda|x|}$
- ermittelt. Bestimmen Sie mit deren Hilfe die partikuläre Lösung
- $y(x)$
- für
- $f(x) = \sin(x)\Theta(x)\Theta(\pi - x)$
- für
- $x > \pi$
- .
- Hinweis:*
- Mögliche Lösung durch zweifache partielle Integration. Es ist
- $\Theta(x) = 1$
- für
- $x \geq 0$
- , sonst 0. Verwenden Sie hier nicht zuviel Zeit!

Lösung der Aufgabe 1

- (a) Wir berechnen die Ableitungen von
- $f(x)$
- und erhalten:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x^2) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos(x^2)2x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\sin(x^2)2^2x^2 + \cos(x^2)2 & f''(0) = 2 \end{array}$$

Damit folgt unmittelbar für die Taylorreihe

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x^2.$$

(b) Die Determinante ergibt sich zu

$$\det(M) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Entsprechend gilt auch $\det(M^{-1}) = 1/\det(M) = 1$. Zur Berechnung des Matrixprodukts benötigt es die transponierte Matrix und es folgt

$$MM^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich um eine orthogonale Matrix, die aufgrund von Determinante 1 eine Drehmatrix ist.

(c) Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators beinhaltet die lineare Rückstellkraft $-\omega_0^2 x$, sowie eine Reibungskraft $-2\gamma\dot{x}$. Der Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Es sind somit drei Fälle zu unterscheiden:

- $\gamma > \omega_0$: λ reell; starke Dämpfung
- $\gamma = \omega_0$: λ reell, aber doppelte Nullstelle; Kriechfall
- $\gamma < \omega_0$: λ komplex, Schwingung mit Dämpfung

(d) Eine Galilei-Transformation besteht aus vier Transformationen:

- Zeittranslation: 1 Parameter t
- Raumtranslation: 3 Parameter \vec{r}
- Gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: 3 Parameter \vec{v}
- Rotation: 3 Parameter (3 Winkel einer (3×3) -Drehmatrix)

(e) Wir berechnen zuerst die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes und erhalten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha xy - z^3 \\ (\alpha - 2)x^2 \\ (1 - \alpha)xz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3z^2 - (1 - \alpha)z^2 \\ 2(\alpha - 2)x - \alpha x \end{pmatrix}$$

Dies verschwindet für $\alpha = 4$. Quellenfreiheit bedeutet, dass die Divergenz des Feldes verschwinden muss, also betrachtet man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \alpha y + (1 - \alpha)xz = 4y - 6xz.$$

Dies verschwindet offensichtlich nicht im gesamten Raum, sondern nur auf einer zweidimensionalen Fläche $y = \frac{6}{4}xz$, damit ist keine Quellenfreiheit gegeben.

(f) Mit der angegebenen Gravitationskraft folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -GMm\frac{1}{r^2}.$$

Wir verfahren wie angegeben und bekommen

$$m\dot{r}\ddot{r} = -GMm\frac{1}{r^2}\dot{r} \quad \rightarrow \quad m\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{r}^2\right] = GMm\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{r}\right].$$

Wir integrieren über die Zeit und erhalten die Beziehung der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - GMm\frac{1}{r} = E = 0.$$

Das Gravitationspotential ist $V(r) = -GMm\frac{1}{r}$.

(g) Die Lösung ergibt sich über ein Faltungsintegral

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') G(x-x') = \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \int_0^{\pi} dx' \sin x' e^{-\lambda|x-x'|} \\ &= \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) \int_0^{\pi} dx' \sin x' e^{-\lambda(x-x')}. \end{aligned}$$

Der Betrag entfällt wegen der Angabe $x > \pi$. Das Integral lässt sich auf verschiedene Art und Weisen lösen. Ohne partielle Integration kommt die Ersetzung des sin durch die Exponentialfunktion aus. Alternativ folgt:

$$\begin{aligned} \int dx' \sin x' e^{-\lambda(x-x')} &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) \sin x' e^{-\lambda(x-x')} - \left(\frac{1}{\lambda}\right) \int dx' \cos x' e^{-\lambda(x-x')} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) \sin x' e^{-\lambda(x-x')} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \cos x' e^{-\lambda(x-x')} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \int dx' \sin x' e^{-\lambda(x-x')} \\ \left(1 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right) \int dx' \sin x' e^{-\lambda(x-x')} &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) \sin x' e^{-\lambda(x-x')} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \cos x' e^{-\lambda(x-x')} \\ \int dx' \sin x' e^{-\lambda(x-x')} &= \frac{1}{1+\lambda^2} (\lambda \sin x' - \cos x') e^{-\lambda(x-x')}. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2\lambda}\right) e^{-\lambda x} \frac{1 + e^{\pi\lambda}}{1 + \lambda^2}.$$

Aufgabe 2: Wegintegral

9P

Gegeben sei das Kraftfeld in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(z, \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, x\right)^T.$$

(a) 2P Berechnen Sie die Rotation des Kraftfeldes.

- (b) 7P Berechnen Sie für $\vec{F}(\vec{r})$ die Arbeit W , die verrichtet wird, wenn man von $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)^T$ nach $\vec{r}_2 = (0, \sinh(2), 0)^T$ läuft. *Hinweis:* Sie können z.B. entlang einer Geraden laufen.

Lösung der Aufgabe 2

- (a) Die Rotation des Kraftfeldes ergibt sich zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- (b) Wir berechnen nun die Arbeit entlang des angegebenen Weges. Wir benötigen eine Parametrisierung des Weges. Man kann beispielsweise geschickt wählen

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\sinh(t)^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cosh(t)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei läuft t von 0 bis 2. Es folgt unmittelbar

$$W = \int_0^2 dt \dot{\vec{s}}(t) \cdot \vec{F}(t) = \int_0^2 dt \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cosh(t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^2 dt 1 = 2.$$

Wer entlang einer Geraden läuft, muss entsprechend substituieren.

Aufgabe 3: Smarties im Schokopudding

9P

Björn-Gonzales wirft mit Smarties auf einen Pudding. Wir betrachten das Problem eindimensional. Zur Zeit $t = 0$ trifft ein (punktförmiges) Smartie mit Masse m auf die Puddingoberfläche bei $z = 0$ mit Geschwindigkeit v und dringt dann in den Pudding ein. Neben der Schwerkraft $F_g = mg$ (die z -Achse zeige in Richtung Erdmittelpunkt) wirkt die Reibungskraft $F_r = -m\gamma\dot{z}$.

- (a) 3P Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Geben Sie die Anfangsbedingungen an.
- (b) 5P Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, indem Sie zuerst die homogene und dann die inhomogene Gleichung lösen, und passen Sie die Lösung den Anfangsbedingungen an.
- (c) 1P Wie verhält sich die Geschwindigkeit im Limes $t \rightarrow \infty$ (für einen unendlich tiefen Pudding)?

Lösung der Aufgabe 3

- (a) Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu

$$m\ddot{z} = -m\gamma\dot{z} + mg \quad \rightarrow \quad \ddot{z} + \gamma\dot{z} = g.$$

Des Weiteren ist $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v$.

- (b) Wir lösen zuerst die homogene Gleichung durch den Ansatz $z(t) = e^{\lambda t}$ und erhalten

$$\lambda^2 + \gamma\lambda = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\gamma.$$

Somit ist die Lösung der homogenen Gleichung von der Form

$$z_h(t) = A_1 + A_2 e^{-\gamma t}.$$

Für die inhomogene Gleichung mit Störterm $f(t) = g$ braucht es aufgrund von $\lambda_1 = 0$ mehr als eine Konstante, daher machen wir den Ansatz $z_p(t) = C_1 + C_2 t$. Einsetzen ergibt $\gamma C_2 = g$ und damit $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{g}{\gamma}$. Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = A_1 + A_2 e^{-\gamma t} + \frac{g}{\gamma} t.$$

Wir passen dies zuletzt noch an die Anfangsbedingungen an. Es ist

$$\begin{aligned} z(0) = A_1 + A_2 = 0 & \quad \rightarrow \quad A_1 = -A_2 \\ \dot{z}(0) = -\gamma A_2 + \frac{g}{\gamma} = v & \quad \rightarrow \quad A_2 = -\frac{v}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} = -A_1. \end{aligned}$$

- (c) Die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\dot{z}(t) = \left(v - \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\lambda t} + \frac{g}{\gamma} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{g}{\gamma}.$$

Somit fällt für $t \rightarrow \infty$ das Smartie mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{g}{\gamma}$.

Aufgabe 4: Scheinkräfte

19P

Eine Kugel bewege sich von Zentrum eines Karussells (in der $x - y$ -Ebene) mit konstanter Geschwindigkeit v auf der Bahnkurve $\vec{r}(t) = (0, vt, 0)^T$ im kartesischen, festen Koordinatensystem Σ . Nun drehe sich das Karussell mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω unter der Kugel reibungsfrei weg.

- (a) 4P Geben Sie die (zeitabhängigen) Einheitsvektoren $\vec{e}_r(t)$, $\vec{e}_\varphi(t)$ und \vec{e}_z des fest mit dem Karussell verbundenen Koordinatensystems Σ' (Zylinderkoordinaten) an. Skizzieren Sie in der $x - y$ -Ebene die Einheitsvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y in Σ sowie \vec{e}_r und \vec{e}_φ in Σ' , sowie die Bahnkurve.
- (b) 4P Zeigen Sie, dass die Bahnkurve $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^T$ im mitbewegten Koordinatensystem gegeben ist durch $\vec{r}'(t) = (vt \sin(\omega t), vt \cos(\omega t), 0)^T$. *Hinweis:* Sie können z.B. das Gleichungssystem $\vec{r}(t) = x'(t)\vec{e}_r(t) + y'(t)\vec{e}_\varphi(t) + z'(t)\vec{e}_z$ in kartesischen Koordinaten lösen.
- (c) 4P Berechnen Sie im mitbewegten(!) Koordinatensystem Σ' die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}'(t)$, ausgehend von $\vec{r}'(t)$. Ist hier die Zeitabhängigkeit der Einheitsvektoren zu berücksichtigen oder nicht? *Hinweis:* Diese Teilaufgabe lässt sich auch ausgehend vom vorgegebenen Resultat aus Teilaufgabe (b) lösen.

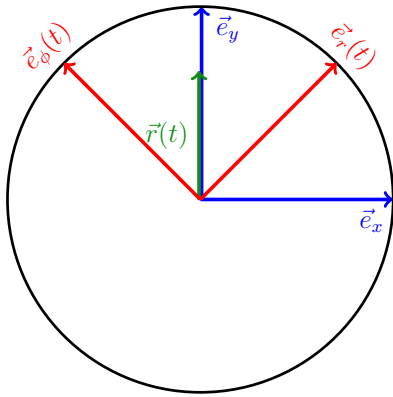
- (d) 7P Die in Teilaufgabe (c) berechnete Beschleunigung lässt sich auch durch die Berücksichtigung von zwei Scheinkräften ermitteln. Benennen Sie die Scheinkräfte und bestätigen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (c) durch Berechnung der Kräfte. *Hinweis:* Sie müssen hierzu einen Vektor $\vec{\omega}$ einführen.

Lösung der Aufgabe 4

- (a) Wir geben zuerst die zeitabhängigen Einheitsvektoren im Koordinatensystem Σ' an, welche gegeben sind durch

$$\vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsvektoren und die Bahnkurve stellen sich wie folgt in der $x - y$ -Ebene dar:



- (b) Wir lösen das angegebene Gleichungssystem in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z' \end{pmatrix}$$

$$z - \text{Komponente} \rightarrow z'(t) = 0$$

$$x - \text{Komponente} \rightarrow x'(t) = y'(t) \tan(\omega t)$$

$$y - \text{Komponente} \rightarrow y'(t)(\sin(\omega t) \tan(\omega t) + \cos(\omega t)) = vt$$

$$\rightarrow y'(t) \left(\frac{1}{\cos(\omega t)} - \cos(\omega t) + \cos(\omega t) \right) = vt \quad \rightarrow \quad y'(t) = vt \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow x'(t) = vt \sin(\omega t)$$

Somit bleibt der angegebene Ortsvektor $\vec{r}'(t)$ im mitbewegten Koordinatensystem. Alternativ kann man auch eine zeitabhängige Rotation durchführen.

- (c) Im mitbewegten Koordinatensystem ist die Zeitabhängigkeit der Einheitsvektoren nicht zu berücksichtigen. Somit ist einzig die explizite Zeitabhängigkeit von $\vec{r}'(t)$ zu ermitteln.

Es folgt unmittelbar

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} vt \sin(\omega t) \\ vt \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}'(t) = \begin{pmatrix} v \sin(\omega t) + vt\omega \cos(\omega t) \\ v \cos(\omega t) - vt\omega \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}'(t) = \begin{pmatrix} v\omega \cos(\omega t) + v\omega \cos(\omega t) - vt\omega^2 \sin(\omega t) \\ -v\omega \sin(\omega t) - v\omega \sin(\omega t) - vt\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v\omega \cos(\omega t) - vt\omega^2 \sin(\omega t) \\ -2v\omega \sin(\omega t) - vt\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Wir bestätigen unser Ergebnis aus Teilaufgabe (c) durch Berechnung der beiden Scheinkräfte, Corioliskraft und Zentrifugalkraft. Diese sind gegeben durch

$$\vec{F}_C + \vec{F}_Z = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Hierbei ist zu definieren $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T$, welcher in beiden Bezugssystemen Σ und Σ' von dieser Form ist. Es folgt weiter

$$\vec{F}_C = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v \sin(\omega t) + vt\omega \cos(\omega t) \\ v \cos(\omega t) - vt\omega \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} -v\omega \cos(\omega t) + vt\omega^2 \sin(\omega t) \\ v\omega \sin(\omega t) + vt\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_Z = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -vt\omega \cos(\omega t) \\ vt\omega \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} -vt\omega^2 \sin(\omega t) \\ -vt\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich in der Summe

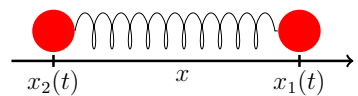
$$\vec{F}_C + \vec{F}_Z = m \begin{pmatrix} 2v\omega \cos(\omega t) - vt\omega^2 \sin(\omega t) \\ -2v\omega \sin(\omega t) - vt\omega^2 \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies deckt sich mit dem Resultat aus Teilaufgabe (c).

Aufgabe 5: Zweikörperproblem

17P

Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 , die über ein Feder mit Federkonstante k miteinander verbunden sind und deren Koordinaten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind. In Ruhelage hat die Feder die Länge a .



- (a) **3P** Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der beiden Massen an.
- (b) **5P** Transformieren Sie die Bewegungsgleichungen auf die Schwerpunkts- $\hat{x}(t)$ und die Relativkoordinate $\tilde{x}(t)$. Nutzen Sie $\hat{x} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ und $\tilde{x} = x_1 - x_2$.
- (c) **3P** Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichungen, dass der Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ erhalten ist.
- (d) **6P** Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $\hat{x}(t)$ und $\tilde{x}(t)$ getrennt. *Hinweis:* Es sind keine Anfangsbedingungen vorgegeben.

Lösung der Aufgabe 5

- (a) Wir formulieren die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - a), \quad m_2 \ddot{x}_2 = +k(x_1 - x_2 - a).$$

- (b) Nun definieren wir gemäß der Angabe die Relativkoordinate $\tilde{x} = x_1 - x_2$ und weiter die Schwerpunktskoordinate $\hat{x} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$. Wir setzen $M = m_1 + m_2$. Dies lässt sich umformen in

$$x_1 = \hat{x} + \frac{m_2}{M} \tilde{x}, \quad x_2 = \hat{x} - \frac{m_1}{M} \tilde{x}.$$

Wir setzen dies in die Bewegungsgleichungen ein und erhalten

$$m_1 \ddot{\hat{x}} + \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\tilde{x}} = -k(\tilde{x} - a), \quad m_2 \ddot{\hat{x}} - \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\tilde{x}} = k(\tilde{x} - a).$$

Addiert man beide Gleichungen, so bleibt

$$(m_1 + m_2) \ddot{\hat{x}} = M \ddot{\hat{x}} = 0$$

als Bewegungsgleichung der Schwerpunktskoordinate. Multipliziert man die erste Gleichung m_2 und die Zweite mit m_1 und subtrahiert, so bleibt die Bewegungsgleichung der Relativkoordinate

$$\frac{m_1 m_2}{M} (m_2 + m_1) \ddot{\tilde{x}} = -k(m_2 + m_1)(\tilde{x} - a), \quad \mu \ddot{\tilde{x}} = -k(\tilde{x} - a).$$

Hierbei verwenden wir die reduzierte Masse $\mu = m_1 m_2 / M$. Die Ruheposition ist offenbar $\tilde{x} = a$. Für $\tilde{x} > a$ wird die Feder gedehnt und induziert eine Kraft mit $\ddot{\tilde{x}} < 0$.

- (c) Es bleibt zu zeigen, dass der Gesamtimpuls eine erhaltene Größe ist. Dieser ist $P = p_1 + p_2 = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$. Es folgt trivialerweise

$$\dot{P} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2) \ddot{\hat{x}} = 0$$

Genauso kann man die Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe (a) einsetzen oder argumentieren, dass $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ gilt.

- (d) Die Lösung der Gleichung der Schwerpunktskoordinate ist die Bewegung eines freien Teilchens und damit (wahlweise nach zweifachem Integrieren)

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \dot{\hat{x}}(0)t.$$

Für die Relativkoordinate ergibt sich eine homogene Gleichung mit konstantem Störterm. Wir machen den üblichen Ansatz für die homogene Gleichung $\tilde{x}_h(t) = e^{\lambda t}$ und erhalten

$$\lambda^2 + \frac{k}{\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{x}_h(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

mit $\omega = \sqrt{k/\mu}$. Eine partikuläre Lösung für

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{k}{\mu} \tilde{x} = \frac{k}{\mu} a$$

liefert der Ansatz $\tilde{x}_p(t) = C$, der sofort $C = a$ ergibt. Also ist

$$\tilde{x}(t) = a + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}.$$

Dies ist eine Schwingung um die Ruhelage.