Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 0

Ausgabe: Mi, 18.10.17 – Abgabe: — – Besprechung: Mi, 25.10.17

Aufgabe 1: Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformationen folgender Funktionen für $a > 0$:

(a) $f_a(t) = e^{-a|t|}$,

(b) $f_b(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$.

Aufgabe 2: Die Diracsche δ-Funktion

(a) Leiten Sie mit Hilfe des Fourier'schen Integraltheorems die folgende Darstellung der δ-Funktion her:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k \, .$$

Wie lautet die entsprechende Darstellung im dreidimensionalem Raum?

(b) Skizzieren Sie eine Stammfunktion der $\delta(x)$-Funktion.

Aufgabe 3: Rechenregeln der Diracsche δ-Funktion

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der δ-Funktion die Gültigkeit folgender Rechenregeln:

(a) $x\delta(x) = 0\,,$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\delta(y-t)\mathrm{d}t = \delta(x-y)\,,$

(c) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)\,,$

(d) $x\delta'(x) = -\delta(x)\,.$

Aufgabe 4: δ-Funktion einer Funktion $g(x)$

$g(x)$ sei eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen x_n [$g(x) = 0, g'(x) \neq 0$]. Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n)\,.$$

Aufgabe 5: Nützliche Relationen zur Vektoranalysis

Beweisen Sie die folgende Relationen zweier Vektorfelder $\vec{a}(x)$ und $\vec{b}(x)$ im $\mathbb{R}^3$.

(a) Gradient des Skalarproduktes:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})\,.$$

(b) Divergenz eines Vektorproduktes:

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})\,.$$

(c) Rotation einer Rotation:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a}\,.$$