Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 12

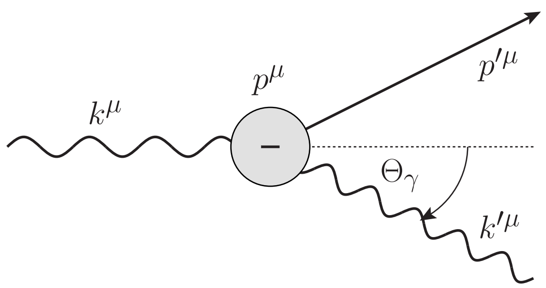
Ausgabe: Fr, 26.01.18 – Abgabe: Fr, 02.02.18 – Besprechung: Mi, 07.02.18

Aufgabe 34: Lorentz–Transformation von $\vec{E}$- und $\vec{B}$–Feld — 6 P

(a) Drücken Sie die Lorentz-Skalare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld aus. Dabei ist $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ der duale Feldstärketensor. Gibt es noch andere andere Invarianten, die in den Felstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ quadratisch sind?

(b) Kann ein elektromagnetisches Feld, das in einem Inertialsystem als rein elektrisch erscheint, in einem anderen als rein magnetisch erscheinen? Welche Kriterien müssen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen, damit es ein Inertialsystem gibt, in dem das elektrische Feld nicht mehr auftritt?

Aufgabe 35: Kinematik für Compton-Streuung — 6 P



Ein Photon mit Vierer-Impuls k streut an einem ruhenden Elektron mit Vierer-Impuls p und überträgt dabei Energie und Impuls auf das Elektron.

(a) Definieren Sie zunächst die Vierer-Impulse des Photons und Elektrons vor und nach dem Stoßprozess mit Polarkoordinaten. Welche Beziehung besteht zwischen Energie und Impuls?
Hinweise: Nehmen Sie an, dass der Prozess in der x-z-Ebene stattfindet und das einlaufende Photon sich in z-Richtung bewegt.

(b) Leiten Sie den Ausdruck

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right)\right)^{-1}$$

für die Energie E'_γ des Photons nach der Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels Θ_γ her. Lösen Sie dafür die aus der Energie-Impuls-Erhaltung

resultierenden Gleichungen und eliminieren Sie den Energie-Impuls Vektor $p_e'^{\mu}$ des Elektrons nach dem Stoß.
Hinweise: Die Ruhemasse des Photons ist $m_\gamma = 0$ und die Ruhemasse des Elektrons m_e.

Aufgabe 36: Zwillingsparadoxon **8 P**

Auf der Südhalbkugel der Erde lebt ein Zwillingspaar. Einer der Zwillinge fliege mit einer Rakete zu einem entfernten Planeten, kehre um und fliege wieder zur Erde zurück, während der andere Zwilling seelenruhig die Zeit am Strand von Fidschi absitzt. Zur näheren Untersuchung des Paradoxons sei der Raketenflug in sechs Phasen unterteilt, genauer Phase 1, der Beschleunigung mit konstanter Beschleunigung a im System S' des Raketenzwillings von der Erde weg über eine Dauer T_a, Phase 2, der Flug mit konstanter Geschwindigkeit V über eine Dauer T_c, Phase 3, dem Landeanflug mit Beschleunigung $-a$ im System S' über eine Dauer T_a. Die Phasen $4-6$ decken äquivalent den Rückflug ab. Alle angegebenen Zeiten seien von der wasserdichten Uhr des sonnengebräunten Erdzwillings im System S abgelesen, welcher beim Abflug seine Uhr mit der des Raketenzwillings im System S' abgeglichen hat.

(a) Berechnen Sie für die einzelnen Phasen die Zeitdilatation

$$\Delta t' = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} \mathrm{d}t \quad .$$

Hinweis:
Verwenden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ aus Sicht des Systems S während Phase 1:

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2/c^2}}$$

Nutzen Sie den arcsinh für das Resultat der ersten Phase 1. Die Phasen $3-6$ folgen aus Symmetrieüberlegungen der Phasen 1 und 2.

(b) Setzen Sie die Gesamtzeit $\Delta t'$ zusammen und zeigen Sie, dass $\Delta t' \leq \Delta t = 4T_a + 2T_c$ gilt. Betrachten Sie den Grenzwert $V \ll c$ und $V = 0.9c$.
Hinweis:
Zeigen und nutzen Sie die nachfolgende Beziehung:

$$T_a = \frac{V}{a\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(c) Das vermeintliche Paradoxon besteht nun in folgender Aussage: Der Raketenzwilling kann behaupten, dass der sonnengebräunte und entspannte Erdzwilling eigentlich jünger sein müsste als er selbst, da das Raketensystem S' in Ruhe war und sich die Erde entfernt und wieder genähert hat. Wo liegt der Denkfehler, der das Paradoxon auflöst? Betrachten Sie hierzu auch den Limes $T_a \to 0$.