Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 2

Ausgabe: Fr, 03.11.17 – Abgabe: Fr, 10.11.17 – Besprechung: Mi, 15.11.17

Aufgabe 5: Scheibe in der Ebene **8 P**

Untersuchen Sie ein Randwertproblem im Halbraum $z > 0$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei $z = 0$ (also auf der x-y Ebene) und $z \to \infty$.

(a) Geben Sie die Green'sche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ an.

(b) Das Potential sei nun auf der x-y-Ebene vorgegeben. Innerhalb des Kreises mit Radius a um den Ursprung sei $\Phi = V$ und ausserhalb $\Phi = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im leeren Halbraum $z > 0$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) mit

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, z = z$$

als

$$\Phi(r,z) = \frac{Vz}{2\pi}\int_0^a \mathrm{d}r' r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \left[z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'\right]^{-3/2} \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass entlang der Kreisachse, also der positiven z-Achse, das Potential die einfach Form

$$\Phi(r=0,z) = V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)$$

annimmt.

(d) Zeigen Sie, dass das Potential (1) für große Entfernungen vom Ursprung $(R^2 = r^2 + z^2 \gg a^2)$ als eine Potenzreihe in $1/R^2$ entwickelt werden kann und die führenden Terme des Potentials dann

$$\Phi = \frac{V}{2}\frac{a^2 z}{R^3}\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a^2}{R^2} + \frac{5}{8}\frac{a^2}{R^4}(a^2 + 3r^2) + \dots\right]$$

ergeben. Verifizieren Sie, dass die Resultate aus (c) und (d) miteinander konsistent sind.

Aufgabe 6: Randterm der geerdeten Kugel $\boxed{\textbf{6 P}}$

Die Dirichlet'sche Green'sche Funktion einer geerdeten, leitenden Kugel mit Radius a lautet mit $x' = |\vec{x}'|$

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a/x'}{|\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}'|} \, .$$

(a) Berechnen Sie den dazugehörigen Randterm

$$\left.\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'}\right|_{x'=a} = \frac{a^2 - x^2}{a(x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma)^{3/2}} \, ,$$

wobei $\gamma = \angle(\vec{x}, \vec{x}')$.

(b) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte, die von einer Punktladung q bei $\vec{x}'$ ($x' > a$) auf der geerdeten Kugel induziert wird. Zeigen Sie, dass die gesamte, auf der Oberfläche induzierte Ladung genau der Spiegelladung entspricht.
Es befinde sich nun eine Punktladung im Inneren der Kugel. Diskutieren Sie kurz das Potential im Inneren der Kugel, sowie die induzierte Oberflächenladungsdichte

Aufgabe 7: 90°-Ecke $\boxed{\textbf{6 P}}$

Zwei geerdete Halbebenen schließen einen 90° Winkel miteinander ein. Eine Halbebene sei die x-z-Ebene mit $x > 0$. Die andere sei die entsprechende, um 90° um die z-Achse gedrehte Halbebene. Die Ebenen treffen sich also in der z-Achse.

(a) Bestimmen Sie das Potential einer Punktladung innerhalb dieses Winkels mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen.

(b) Untersuchen Sie das Potential für große Entfernungen r von der Probeladung. Geben Sie den im allgemeinen führenden Term explizit an.