Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 3

Ausgabe: Fr, 10.11.17 – Abgabe: Fr, 17.11.17 – Besprechung: Mi, 22.11.17

Aufgabe 8: Prolate sphärische Koordinaten — 5 P

Prolate sphärische Koordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= a\sinh(\mu)\sin(\nu)\cos(\varphi)\,, \\ y &= a\sinh(\mu)\sin(\nu)\sin(\varphi)\,, \\ z &= a\cosh(\mu)\cos(\nu) \end{aligned}$$

mit $\mu \geq 0$, $\nu \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und konstantem $a > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren in μ, ν und φ-Richtung und überprüfen Sie, ob diese orthogonal zueinander sind.

(b) Bestimmen Sie den Nabla-Operator ∇ in Abhängigkeit der in a) bestimmten Einheitsvektoren.

Aufgabe 9: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten — 5 P

(a) Bestimmen Sie die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\Theta\hat{\Theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie dazu die aus der Vorlesung bekannte Darstellung

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\Theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

des Nabla-Operators in Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie daraus den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 10: Dipolfeld $\boxed{\textbf{5 P}}$

Ein elektrostatischer Dipol bestehe aus einer negativen Ladung $-q$ am Ursprung und einer positiven Ladung q bei $\vec{a}$.

(a) Wie lautet das Potential $\Phi(\vec{r})$?

(b) Bestimmen Sie die Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten. Wählen Sie dazu die z-Achse parallel zu $\vec{a}$.

(c) Bestimmen Sie den führenden Term des Potentials für $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$

Aufgabe 11: Legendre–Differentialgleichung $\boxed{\textbf{5 P}}$

Gegeben sind die Polynome $P_\ell(x)$, die durch die Formel von Rodrigues,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell$$

definiert sind.

(a) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsformeln

$$\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_{\ell-1}}{\mathrm{d}x} - (2\ell+1)P_\ell = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x} - (\ell+1)P_\ell = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie mittels obiger Rekursionsformeln, dass die Polynome $P_\ell(x)$ der Legendre'schen Differentialgleichung mit $m^2 = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) = \ell(\ell+1)P_\ell$$

genügen.

Hinweis: Folgende (per Induktion beweisbare) Relation könnte nützlich sein:

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(xf(x)) = \ell\frac{\mathrm{d}^{\ell-1}f(x)}{\mathrm{d}x^{\ell-1}} + x\frac{\mathrm{d}^\ell f(x)}{\mathrm{d}x^\ell}\,.$$