Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Ausgabe: Fr, 17.11.17 – Abgabe: Fr, 24.11.17 – Besprechung: Mi, 29.11.17

Aufgabe 12: Randwertproblem in kartesischen Koordinaten **[8 P]**

Betrachten Sie ein in z–Richtung unendlich ausgedehntes leitendes Rohr von rechteckigem Querschnitt. In der x–y–Ebene liegt das Rohr bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$. Das Potential bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ sei $\Phi = 0$. Bei $y = b$ habe das Rohr das Potential

$$\Phi(x, y = b) = V(x)$$

Bestimmen Sie das von z unabhängige Potential $\Phi(x, y)$ im ladungsfreien inneren des Leiters für

(a)

$$V(x) = V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

(b) und

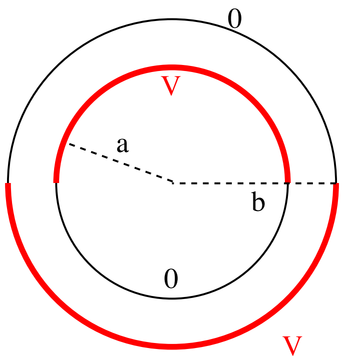
$$V(x) = V_0\left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right) .$$

Hinweis:
Schreiben Sie die Randbedingung zunächst als Fourier–Reihe. Um die Koeffizienten der Fourierreihe zu bestimmen kann folgende Relation hilfreich sein:

$$\frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{d}x \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \delta_{nm} .$$

Aufgabe 13: Konzentrische Hemisphären $\boxed{\mathbf{6\ P}}$

Zwei konzentrische, leitende Kugelschalen mit Radien $a, b\,(a < b)$ sind durch dieselbe Ebene in voneinander isolierte Halbkugeln geteilt. Die obere Hälfte der inneren Kugel und die untere Hälfte der äusseren haben das konstante Potential V, während die beiden übrigen Halbkugeln geerdet sind ($V = 0$).



Bestimmen Sie das Potential zwischen den Kugeln, also im Bereich $a < r < b$ als eine Reihe in Legendre Polynomen $P_\ell(\cos(\Theta))$. Nehmen Sie Terme bis mindestens $\ell = 4$ mit.

Hinweis:
Beachten Sie, dass das Potential azimuthal symmetrisch ist. Es kann hilfreich sein die Ortogonalitätsrelation der Legendre Polynome zu verwenden.

Aufgabe 14: Drehimpulsoperator $\boxed{\mathbf{6\ P}}$

(a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\vec{L}^2 = -\hbar^2(\vec{r} \times \nabla)^2$ (der Ihnen in der Quantenmechanik wiederbegegnen wird, zur Vereinfachung der Rechnung sei $\hbar = 1$) in Kugelkoordinaten explizit als Differentialoperator

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin(\Theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\sin(\Theta)\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) - \frac{1}{\sin^2(\Theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

geschrieben werden kann. Wie lautet der Zusammenhang mit dem Laplace–Operator?

(b) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\Theta, \varphi)$ Eigenfunktionen von $\vec{L}^2$ zu den Eigenwerten $\ell(\ell + 1)$ sind.

Hinweis:
Sie können die Relation, welche Sie in Aufgabe 11 a) und b) hergeleitet haben, verwenden.