

# Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

## Übungsblatt 4

Ausgabe: Fr, 17.11.17 – Abgabe: Fr, 24.11.17 – Besprechung: Mi, 29.11.17

### Aufgabe 12: Randwertproblem in kartesischen Koordinaten

8 P

Betrachten Sie ein in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehntes leitendes Rohr von rechteckigem Querschnitt. In der  $x$ - $y$ -Ebene liegt das Rohr bei  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  und  $y = b$ . Das Potential bei  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  sei  $\Phi = 0$ . Bei  $y = b$  habe das Rohr das Potential

$$\Phi(x, y = b) = V(x)$$

Bestimmen Sie das von  $z$  unabhängige Potential  $\Phi(x, y)$  im ladungsfreien inneren des Leiters für

(a)

$$V(x) = V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

(b) und

$$V(x) = V_0 \left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right).$$

*Hinweis:*

Schreiben Sie die Randbedingung zunächst als Fourier-Reihe. Folgende Relation kann hilfreich sein:

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \delta_{nm}.$$

**Aufgabe 13: Konzentrische Hemisphären****7 P**

Zwei konzentrische, leitende Kugelschalen mit Radien  $a, b$  ( $a < b$ ) sind durch dieselbe Ebene in voneinander isolierte Halbkugeln geteilt. Die obere Hälfte der inneren Kugel und die untere Hälfte der äusseren haben das konstante Potential  $V$ , während die beiden übrigen Halbkugeln geerdet sind ( $V = 0$ ). Bestimmen Sie das Potential zwischen den Kugeln, also im Bereich  $a < r < b$  als eine Reihe in Legendre Polynomen  $P_\ell(\cos(\Theta))$ . Nehmen Sie Terme bis mindestens  $\ell = 4$  mit.

**Aufgabe 14: Drehimpulsoperator****5 P**

- (a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator  $\vec{L}^2 = -(\vec{r} \times \nabla)^2$  (der Ihnen in der Quantenmechanik wiederbegegnen wird) in Kugelkoordinaten explizit als Differentialoperator

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin(\Theta)} \left( \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\Theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

geschrieben werden kann. Wie lautet der Zusammenhang mit dem Laplace-Operator?

- (b) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen  $Y_\ell^m(\Theta, \varphi)$  Eigenfunktionen von  $\vec{L}^2$  zu den Eigenwerten  $\ell(\ell + 1)$  sind.