Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 5

Ausgabe: Fr, 24.11.17 – Abgabe: Fr, 01.12.17 – Besprechung: Mi, 06.12.17

Aufgabe 15: Dipol in einer Kugel $\boxed{5\ \text{P}}$

Wir betrachten einen Dipol aus zwei Punktladungen $\pm q$ bei $\pm a\hat{x}/2$.

(a) Wie lautet das Potential des Dipols im freien Raum, wenn $a \to 0$ bei festem $p = qa$?

(b) Jetzt befinde sich der Dipol ($a \to 0$) im Zentrum einer Kugelschale mit Radius b, auf der ein Potential

$$\Phi(b, \Theta) = V(\Theta) = V\cos(\Theta)$$

liegt. Θ ist der Polarwinkel bezüglich der z–Achse (nicht der x–Achse!). Bestimmen Sie das Potential $\Phi(r, \Theta)$ im Inneren der Kugelschale.
Hinweis:
Verwenden Sie die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen und nutzen Sie deren Orthogonalitätsrelation.

Aufgabe 16: Gleichseitiges Dreieck $\boxed{5\ \text{P}}$

Drei Punktladungen $+q$ befinden sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a. Das Dreieck liege in der x–y–Ebene mit dem Schwerpunkt im Ursprung und einer Ecke auf der y–Achse. Im Schwerpunkt des Dreicks befindet sich noch eine weitere Punktladung $-3q$.

(a) Berechnen Sie das Monopol–, Dipol– und Quadrupolmoment der Ladungsverteilung.

(b) Bestimmen Sie den führenden Term des Potentials und das elektrische Feld für große Abstände $r \gg a$.

Aufgabe 17: Azimuthal symmetrisches Randwertproblem $\boxed{5\ \mathrm{P}}$

Gegeben ist ein azimuthal symmetrisches Potential auf der z-Achse in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r,\Theta=0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das sich Potential nach einer Entwicklung in Legendre-Polynomen für $r>a$ wie folgt schreiben lässt:

$$\Phi(r,\Theta=0)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{b_{2\ell}}{r^{2\ell+1}}.$$

mit

$$\begin{aligned} b_0 &= 0\,,\\ b_{2\ell} &= -a^{2\ell}(-1)^\ell\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es ist hilfreich die Wurzel $\sqrt{r^2+a^2}$ als Abstand zweier Vektoren auszudrücken. Nutzen Sie die Punktsymmetrie für ungerade ℓ bei der Bestimmung von $P_\ell(0)$.

(b) Bestimmen Sie nun das Potential $\Phi(r>a,\Theta)$ für den gesamten Raum $r>a$ und ermitteln Sie das elektrische Feld des führenden Terms in Kugelkoordinaten.

(c) Argumentieren Sie, welche physikalisches Ausgangssituation dieses Potential beschreibt.

Aufgabe 18: Invarianz der führenden Multipolmomente $\boxed{5\ \mathrm{P}}$

Verallgemeinerte kartesische Multipolmomente $Q_{\alpha\beta\gamma}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ lassen sich als

$$Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma}=\int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r})x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad (\text{wobei } \ell=\alpha+\beta+\gamma)$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass sich jedes sphärische Multipolmoment $q_{\ell m}$ als Linearkombination der verschiedenen $Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma}$ schreiben lässt.

(b) Zeigen Sie, ausgehend von Teil (a), dass die führenden $q_{\ell m}$ invariant bleiben, wenn man den Ursprung des Koordinatensystems beliebig verschiebt. Erklären Sie auch, warum die höheren Momente von der Wahl des Ursprung abhängen. Was passiert, wenn man das Koordinatensystem zusätzlich noch verdreht?