Karlsruher Institut für Technologie

WiSe 2017/18

Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Ausgabe: Fr, 01.12.17 – Abgabe: Fr, 08.12.17 – Besprechung: Mi, 13.12.17

Aufgabe 19: Energie in einer geladenen Kugel — 5 P

Bestimmen Sie die im Kugelvolumen enthaltenen Energie einer geladenen Kugel mit Radius a und Ladungsdichte $\rho_V = \rho_0 \Theta(a - r)$ in zwei Schritten.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass das elektrische Feld in Kugelkoordinaten gegeben ist durch:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\hat{r} & \text{für } r \leq a \\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\hat{r} & \text{für } r > a \end{cases}.$$

(b) Bestimmen Sie nun mit der Energiedichte

$$w(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(r)$$

den Beitrag zur elektrostatischen Gesamtenergie W aus dem inneren einer Sphäre mit Radius R am Ursprung .

Aufgabe 20: Konzentrische Kugeln mit Dielektrikum — 7 P

Zwei konzentrische, leitende Kugeln mit inneren und äußeren Radien a und b haben ihren Mittelpunkt im Ursprung. Die innere Kugel trägt die Ladung $+Q$ und die äußere $-Q$. Für $z > 0$ sei der Raum zwischen den Kugeln mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ gefüllt.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld im Raum zwischen den Kugeln.

(b) Wie lautet die Oberflächenladungsdichte auf der inneren Kugel?

(c) Wie lautet die Polarisationsladungsdichte, die auf der Oberfläche des Dielektrikums nahe $r = a$ induziert wird?

Aufgabe 21: Besselfunktionen $\boxed{\textbf{8 P}}$

Die Laplace–Gleichung in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) lautet

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

(a) Nutzen Sie für die Lösung der Laplace–Gleichung den Separationsansatz

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)F(\varphi)Z(z)\,.$$

Wie lautet die Radialgleichung, wenn die Differentialgleichungen für F und Z

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2 Z\,, \qquad \frac{d^2F}{d\varphi^2} = -\nu^2 F$$

lauten? Setzen Sie $x = k\rho$ (Bessel'sche Differentialgleichung).

(b) Lösen Sie die Bessel'sche Differentialgleichung mit dem Potenzreihenansatz

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_j mit ungeradem Index verschwinden, während die geraden Koeffizienten die Rekursionsformel

$$a_{2j} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+\alpha)}$$

erfüllen. Dabei sollte auch $\alpha = \pm\nu$ herauskommen.

(c) Bestimmen Sie die ersten Koeffizienten explizit und zeigen, dass sie mit der Wahl $a_0 = 1/(2^\alpha\Gamma(\alpha+1))$

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}j!\Gamma(j+\alpha+1)}\frac{1}{2^\alpha}$$

lauten. Die so bestimmten Radialfunktionen sind die Besselfunktionen erster Art der Ordnung $\pm\nu$.
Hinweis: Verwenden Sie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(d) Wie verhalten sich die Besselfunktionen für $x \to 0$? Welches asymptotische Verhalten der Besselfunktionen bei $x \to \infty$ können Sie direkt aus der Differentialgleichung schließen?