# Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

## Übungsblatt 8

Ausgabe: Fr, 15.12.17 – Abgabe: Fr, 22.12.17 – Besprechung: Mi, 10.01.18

**Aufgabe 24: Helmholtz-Spulen** $\boxed{\textbf{5 P}}$

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius $a$ wird vom Strom $I$ durchflossen und liegt innerhalb der $x$–$y$–Ebene bei $z = 0$. Eine weitere Schleife mit gleichem Radius liegt parallel dazu bei $z = b$ und wird ebenfalls vom Strom $I$ durchflossen. Wie lautet das $\vec{B}$–Feld entlang der $z$–Achse? Bestimmen Sie $b$ so, dass das $\vec{B}$–Feld genau zwischen den Spulen, bei $z = b/2$ besonders homogen wird.

**Lösung der Aufgabe 24**

Das $\vec{B}$-Feld ist gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \mathrm{d}\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2}$$

Der Ring kann einfach mit Zylinderkoordinaten parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l} &= a\,(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)\,\mathrm{d}\varphi \\
\vec{r} - \vec{r'} &= (x - a\cos(\varphi), y - a\sin(\varphi), z) \\
\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} - \vec{r'} &= a\mathrm{d}\varphi \left( z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), -y\sin(\varphi) + a\sin^2(\varphi) - x\cos(\varphi) + a\cos^2(\varphi) \right) \\
B(0,0,z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} a\mathrm{d}\varphi \frac{(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} a \frac{(0, 0, 2\pi a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}
\end{aligned}$$

Dies ist das Feld einer Spule auf der z-Achse. Per Superposition wird nun das Gesamtfeld zweier Spulen (eine bei $z = 0$ und eine bei $z = b$) auf der z-Achse bestimmt:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left( \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z - b)^2)^{3/2}} \right)$$

Das Feld in der Mitte der Spule soll möglichst homogen sein, also gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=b/2} \overset{!}{=} 0\,,$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B_z}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=b/2} \overset{!}{=} 0\,,$$
$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=b/2} &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2}\cdot 3\left.\left(\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}}+\frac{z-b}{(a^2+(z-b)^2)^{5/2}}\right)\right|_{z=b/2}\\ &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2}\cdot 3\left.\left(\frac{b/2}{(a^2+(b/2)^2)^{5/2}}-\frac{b/2}{(a^2+(b/2)^2)^{5/2}}\right)\right|_{z=b/2} = 0\end{aligned}$$

Dies ist immer erfüllt.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2B_z}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=b/2} &= \frac{-3\mu_0 I a^2}{2}\left.\left(\frac{a^2+z^2-5z^2}{(a^2+z^2)^{7/2}}+\frac{a^2+(z-b)^2-5(z-b)^2}{(a^2+(z-b)^2)^{7/2}}\right)\right|_{z=b/2}\\ &= \frac{-3\mu_0 I a^2}{2}\frac{a^2-4(b/2)^2+a^2-4(b/2)^2}{(a^2+(b/2)^2)^{7/2}} = 0\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad a = b$$

Eine Helmoltz-Spule hat somit den gleichen Abstand zwischen den Ringen wie der Durchmesser der einzelnen Ringe. Im Mittelpunkt zwischen beiden Ringen ist ein besonders homogenes Magnetfeld.

## Aufgabe 25: Abschirmung paralleler Leiter $\boxed{\textbf{10 P}}$

Zwei unendlich lange gerade Leiter befinden sich parallel zur $z$–Achse bei $x = \pm d/2$, $y = 0$. Die Leiter werden entgegengesetzt von einem Gleichstrom $\pm I$ durchflossen.

(a) Zunächst betrachten Sie nur einen unendlich langen Draht in einem Medium mit $\mu_r$.

(i) Wie lautet das $\vec{H}$–Feld im ganzen Raum um den Draht in Zylinderkoordinaten?
*Hinweise:*
Sie dürfen für diesen Teil annehmen, dass der Draht sich bei $x = 0$ befindet.

$$\nabla_{\mathrm{Zyl}} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(ii) Die Stromdichte ist auf den Draht begrenzt, also läßt sich das $\vec{H}$–Feld durch ein skalares Potential $\Phi_m$ beschreiben, so dass $\vec{H} = -\nabla\Phi_m$. Bestimmen Sie das skalare Potential in kartesischen Koordinaten, wenn sich der Draht bei $x = a$, $y = 0$ befindet.

(b) Nun betrachten Sie beide Leiter bei $x = \pm d/2$

(i) Bestimmen Sie analog zu (a) das skalare Potential des Leiterpaares. Zeigen Sie, dass das Potential bei kleinem Abstand $d \ll \rho$ in Zylinderkoordinaten

$$\Phi_m = -\frac{Id\sin(\varphi)}{2\pi\rho}$$

(ii) Die Drähte befinden sich nun im Zentrum eines Stahlzylinders mit innerem Radius $a$ und äußerem Radius $b$ und Permeabilität $\mu = \mu_0\mu_r$ . Das Potential kann (immer noch im Limes $d \ll \rho$ ) dann innerhalb und außerhalb des Zylinders als

$$\Phi_m = \begin{cases} \frac{\alpha}{\rho}\sin(\varphi) & \rho > b \\ \left(\beta\rho + \frac{\gamma}{\rho}\right)\sin(\varphi) & a < \rho \leq b \\ \left(-\frac{Id}{2\pi\rho} + \delta\rho\right)\sin(\varphi) & \rho \leq a \end{cases}$$

angesetzt werden. Damit ist das äußere Feld ebenfalls ein Dipolfeld, wie in Teil (i). Bestimmen Sie die reellen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus geeigneten Randbedingen an die $\vec{B}$– und $\vec{H}$–Felder. Zeigen Sie damit, dass das äußere Feld gegenüber dem Feld ohne den Zylinder um einen Faktor

$$F = \frac{4\mu_r b^2}{(\mu_r+1)^2b^2 - (\mu_r-1)^2a^2}$$

schwächer ist.

**Lösung der Aufgabe 25**

(a) (i) Beginnend mit einem langen Draht auf der z-Achse. Dieser besitzt das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = j(r)\hat{z} \Rightarrow \vec{A} = A_z\hat{z}$$

Da der Stom konstant ist, gilt $A_z = A_z(r)$ und ist unabhängig von $\varphi$ und $z$.

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{A} \overset{\text{Hinweis}}{=} -\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{\varphi} = \mu_r\mu_0\vec{H}$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{H} = H_\varphi(r)\hat{\varphi} = H(r)\hat{\varphi}$$

Nun bestimmen wir $H(r)$ mittels der Integration über die Kreisfläche und den Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{j} = I = \int_A \mathrm{d}\vec{S}\left(\nabla\times\vec{H}\right) \\ = \oint_{\partial A}\mathrm{d}\vec{r}\vec{H} = H_\varphi\cdot 2\pi r \\ \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}\end{aligned}$$

(ii) Da ausserhalb des Drahtes $\nabla\times\vec{H}=0$ ist, kann man das $\vec{H}$ mit einem Skalar beschreiben :

$$\vec{H} = -\nabla\Phi_m$$

Da

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}(r)\hat{\varphi} \\ \Rightarrow H(r) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\varphi} = \frac{I}{2\pi r} \\ \Rightarrow \Phi_m &= -\frac{I}{2\pi}\varphi + C\end{aligned}$$

Wir wählen