Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 9

Ausgabe: Fr, 22.12.17 – Abgabe: Fr, 12.01.17 – Besprechung: Mi, 17.01.18

Aufgabe 26: Unendlich langer stromdurchflossener Draht — 5 P

Betrachten Sie einene homogenen, unendlich langen Draht mit Radius R und konstanter Leitfähigkeit κ. Das Ohm'sche Gesetz besagt, dass die Stromdichte durch $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ gegeben ist. Im Draht befindet sich ein konstantes, zeitunabhhängiges elektrisches Feld $\vec{E}$ parallel zur Richtung des Drahtes.
Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}$ für dieses System auf unterschiedliche Weisen:

(a) mit Hilfe des Erhaltungssatzes in differentieller (lokaler) Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}\,,$$

wobei u die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

(b) mit der Formel

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}\,.$$

Es ist hilfreich sich vorher die Richtung des Poynting-Vektors zu überlegen.

Aufgabe 27: Induktivität eines abgeschirmten Leiters — 5 P

Durch einen langen Draht mit Durchmesser $2b$ und Permeabilität μ fließt ein Strom I. Der Draht befindet sich in der Luft und ist von einer leitenden zylindrischen Hülle vom Radius $a > b$ umschlossen, durch die der Strom zurückfließt. Die Achsen von Draht und Hülle fallen zusammen.

(a) Angenommen, die Stromdichte ist konstant über den Querschnitt des Drahtes. Wie lautet die Selbstinduktivität pro Längenheit des Stromkreises?
Hinweis:
Um die Selbstinduktivität zu bestimmen nutzen Sie die Formel $W = \frac{1}{2}LI^2$

(b) Wie lautet die Selbstinduktivität pro Längeneinheit, wenn der Draht durch einen Hohlleiter vom Radius b ersetzt wird?

Aufgabe 28: Rotierende Christbaumkugel $\boxed{\textbf{10 P}}$

Eine Christbaumkugel vom Radius R trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung Q. Sie rotiere mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}$ um ihren Durchmesser.

(a) Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ und das magnetische Moment $\vec{m}$ der Kugel für $\hat{\omega} \parallel \hat{z}$.

(b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel.
Hinweis:
Es vereinfacht die Integration, wenn Sie $\vec{r}$ entlang der z-Achse ausrichten und die Richtung von $\hat{\omega}$ nicht festlegen.
Kontrollergebnis:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R}\frac{r_<^3}{r^3}\vec{\omega} \times \vec{r}$$

mit $r_< = \min(r, R)$.

(c) Angenommen, das Magnetfeld der Erde ließe sich so beschreiben. Seine horizontale Komponente hat in Karlsruhe die Stärke von etwa 20μT. Bestimmen Sie daraus die Größe des magnetischen Moments und die im Erdmagnetfeld gespeicherte Energie

$$U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\vec{B}^2$$

(das Integral erstreckt sich nur über den Außenraum der Kugel). Vergleichen Sie mit der kinetischen Energie der täglichen Rotation der Erde. Zahlenwerte für den Vergleich: Geographische Breite von Karlsruhe $\beta = 49°$; Radius der Erde $R \approx 6400$ km; Masse der Erde $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg.