Klassische Theoretische Physik III

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Probeklausur

Mi, 31.01.2018

Tragen Sie bitte leserlich Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in den dafür vorgesehenen Feldern auf der hier vorliegenden Titelseite ein und geben Sie dieses Blatt nach Beendigung der Klausur mit ab. Schreiben Sie auch auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt leserlich Ihre Matrikelnummer. Die Klausuraufgaben sind nach Beendigung der Klausur mit abzugeben.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten. Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt ist als Hilfsmittel zugelassen. Verwenden Sie nur ausgegebenes Papier. Falls Sie mehr Papier benötigen melden Sie sich. Bearbeiten Sie auf einem Blatt nur eine Aufgabe. Verwenden Sie weder Bleistifte noch rote Stifte. Am Ende der Klausuraufgaben finden Sie eine kurze mathematische Formelsammlung.

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	Summe
Punkte	3	9	8	
Kürzel				

Aufgabe 1: Kurzfragen $\boxed{3\ \text{P}}$

(a) $\boxed{1\ \text{P}}$ Welches Grundprinzip steckt hinter der Kontinuitätsgleichung? Leiten Sie die Gleichung aus den kovarianten Maxwell-Gleichungen ab.

(b) $\boxed{2\ \text{P}}$ Die kinetische Energie eines π^+-Meson in einem Inertialsystem sei 2/3 seiner Ruheenergie. Geben Sie die Geschwindigkeit des Pions (in Bruchteilen von c) an.

Aufgabe 2: Magnetfeld einer azimuthalsymmetrischen Stromdichte $\boxed{9\ \text{P}}$

Gegeben ist die Stromdichte $\vec{j}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{j}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{j_0}{R} r \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\Theta(R-r)\hat{\varphi}$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ und $\hat{\varphi} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$.

(a) $\boxed{6\ \text{P}}$ Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für $r > R$. Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})$ die Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_0 r^{-k} \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\hat{\varphi}$$

hat.

Hinweis:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\ ,$$

wobei $r_< = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|), r_> = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$.

(b) $\boxed{3\ \text{P}}$ Bestimmen Sie das $\vec{B}$-Feld für $r > R$.

Aufgabe 3: Kugel vor einer Ebene $\boxed{8\ \text{P}}$

Eine Vollkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 (R-r)^2 & r \le R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (r = |\vec{r}|)\ .$$

(a) $\boxed{2\ \text{P}}$ Berechnen Sie die Ladung und das Dipolmoment der Kugel.

(b) $\boxed{1{,}5\ \text{P}}$ Welche Werte haben die Multipolmomente $q_{\ell m}$ mit $\ell > 1$?

(c) $\boxed{4{,}5\ \text{P}}$ Die Kugel befinde sich bei $z = a > R$ vor der geerdeten x–y–Ebene. Wie lautet die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der Ebene?

Formelsammlung:

- Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \,, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \,, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi} \,,$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) \,, Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta\cos\vartheta e^{i\varphi} \,, Y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta e^{2i\varphi} \,,$$

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm} \,.$$

- Rotation des Feldes $\vec{A} = (A_r, A_\vartheta, A_\varphi)$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} =& \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right] \\ &+ \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\, r}(rA_\varphi)\right] \\ &+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\, r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right] \,.\end{aligned}$$