

Aufgabe 1: Kurzfragen**3 P**

- (a) **3 P** Welches Grundprinzip steckt hinter der Kontinuitätsgleichung? Leiten Sie die Gleichung aus den kovarianten Maxwell-Gleichungen ab.
- (b) **2 P** Die kinetische Energie eines π^+ -Meson in einem Inertialsystem sei $2/3$ seiner Ruheenergie. Geben Sie die Geschwindigkeit des Pions (in Bruchteilen von c) an.

Lösung der Aufgabe 1

- (a)
- 1 P**

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu$$

Die linke Seite erfüllt $\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$. Somit folgt unmittelbar die Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$ **0,5 P**.

Das dahinterliegende Grundprinzip ist Ladungserhaltung! **0,5 P** (vll auch differentielle Form mit ρ und \vec{j} oder sogar integrale Form mit Fluss durch Oberfläche....)

- (b)
- 2 P**
- Die kinetische Energie
- E_{kin}
- ergibt sich aus der relativistischen Energie
- $E = \gamma E_0$
- mit Ruheenergie
- E_0
- nach

$$\gamma E_0 = E = E_{kin} + E_0 = E_{kin} + E_0 = \left(\frac{2}{3} + 1\right) E_0 = \frac{5}{3} E_0 \quad \mathbf{1,0 P}.$$

Daraus folgt $\gamma = 5/3$ und weiter

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4}{5} c \quad \mathbf{1,0 P}.$$

Aufgabe 2: Magnetfeld einer azimuthalsymmetrischen Stromdichte **9 P**

Gegeben ist die Stromdichte \vec{j} in Kugelkoordinaten

$$\vec{j}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{j_0}{R} r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \Theta(R - r) \hat{\varphi}$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ und $\hat{\varphi} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$.

- (a)
- 6 P**
- Berechnen Sie das Vektorpotential
- $\vec{A}(\vec{r})$
- für
- $r > R$
- . Zeigen Sie, dass
- $\vec{A}(\vec{r})$
- die Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_0 r^{-k} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \hat{\varphi}$$

hat.

Hinweis:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

wobei $r_{<} = \min(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$, $r_{>} = \max(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$.

- (b) 3 P Bestimmen Sie das \vec{B} -Feld für $r > R$.

Lösung der Aufgabe 2

- (a) 6 P Wir berechnen direkt das Vektorpotential mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'.$$

Wir setzen die Entwicklung von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nach Kugelflächenfunktionen (s. Aufgabenblatt) ein. Da wir \vec{A} nur für $r > R$ suchen, gilt immer $r_{>} = r$, $r_{<} = r'$. Damit bekommen wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \underbrace{\int d^3r' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \vec{j}(\vec{r}')}_{=I}. \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

Die Stufenfunktion beschränkt lediglich die \vec{r}' Integration. Mit der Beobachtung

$$Y_{21}(\Omega) + Y_{2,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta (-e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = -2i \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi, \quad \boxed{0,5 \text{ P}}$$

$$Y_{21}(\Omega) - Y_{2,-1}(\Omega) = -2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi, \quad \boxed{0,5 \text{ P}}$$

(Ω ist der Raumwinkel (ϑ, φ)) können wir den Integranden umformen,

$$I = -\frac{j_0}{R} \int_0^R dr' r'^{l+3} \int d\Omega' \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{lm}^*(\Omega') \begin{pmatrix} i(Y_{21}(\Omega') + Y_{2,-1}(\Omega')) \\ Y_{21}(\Omega') - Y_{2,-1}(\Omega') \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

Das Integral über Ω' lösen wir mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und erhalten insgesamt

$$I = \frac{j_0}{R} \frac{R^{l+4}}{2(l+4)} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \begin{pmatrix} -i(\delta_{l,2}\delta_{m,1} + \delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ -(\delta_{l,2}\delta_{m,1} - \delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

Setzen wir nun in $\vec{A}(\vec{r})$ ein, so bleiben uns wegen der Kronecker Symbole jeweils nur zwei Terme aus der Summe, beide mit $l = 2$. Das ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0 \mu_0 R^6}{R \cdot 2 \cdot 6} \sqrt{\frac{8\pi}{15} \frac{1}{5} \frac{1}{r^3}} \begin{pmatrix} -i(Y_{21}(\Omega) + Y_{2,-1}(\Omega)) \\ -(Y_{21}(\Omega) - Y_{2,-1}(\Omega)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{j_0 \mu_0 R^5}{60r^3} \begin{pmatrix} -2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \\ 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ hat also die gesuchte Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0 \mu_0 R^5}{30r^3} \sin \vartheta \cos \vartheta \vec{e}_\varphi = \frac{A_0}{r^3} \sin \vartheta \cos \vartheta \vec{e}_\varphi. \quad \boxed{1 \text{ P}}$$

- (b) $\boxed{3 \text{ P}}$ Wir berechnen $\vec{B}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten direkt aus $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in Kugelkoordinaten. Da $\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, A_\varphi(r, \vartheta))$ tragen nur zwei Terme zur Rotation bei,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \quad \boxed{1 \text{ P}} \\ &= \vec{e}_r \frac{A_0}{r \sin \vartheta} \left(\frac{2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{r^3} + \frac{-\sin^3 \vartheta}{r^3} \right) - \vec{e}_\vartheta \frac{A_0}{r} \frac{(-2 \sin \vartheta \cos \vartheta)}{r^3} \\ &= \frac{j_0 \mu_0 R^5}{30r^4} ((3 \cos^2 \vartheta - 1) \vec{e}_r + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta). \quad \boxed{2 \text{ P}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Kugel vor einer Ebene

$\boxed{8 \text{ P}}$

Eine Vollkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0(R-r)^2 & r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (r = |\vec{r}|).$$

- (a) $\boxed{2 \text{ P}}$ Berechnen Sie die Ladung und das Dipolmoment der Kugel.
 (b) $\boxed{1,5 \text{ P}}$ Welche Werte haben die Multipolmomente $q_{\ell m}$ mit $\ell > 1$?
 (c) $\boxed{4,5 \text{ P}}$ Die Kugel befinde sich bei $z = a > R$ vor der geerdeten x - y -Ebene. Wie lautet die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der Ebene?

Lösung der Aufgabe 3

- (a) $\boxed{2 \text{ P}}$ Ladung:

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int \rho(r) r^2 dr \int d\Omega = 4\pi \rho_0 \int_0^R (r^4 - 2Rr^3 + R^2r^2) dr \\ &= 4\pi \rho_0 \left(\frac{1}{5} R^5 - 2 \frac{R}{4} R^4 + \frac{R^2}{3} R^3 \right) = \frac{2\pi \rho_0 R^5}{15}. \quad \boxed{3 \text{ P}} \end{aligned}$$

Dipolmoment:

$$\vec{p} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int \vec{r} \rho(r) d^3\vec{r} = \int -\vec{r} \rho(-r) d^3\vec{r} \stackrel{\text{radialsymm.}}{=} - \int \vec{r} \rho(r) d^3\vec{r} = -\vec{p}$$

Also muss $\vec{p} = 0$ sein. 3 P

- (b) 1,5 P Die Ladungsdichte ist kugelsymmetrisch (also nicht von ϑ, φ abhängig) und hat daher nur einen Monopolterm 0,5 P.

Begründung: Die Entwicklung des Winkelanteils der Ladungsdichte $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen enthält nur den Term proportional $Y_{00}(\vartheta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$. Wegen der Orthogonalität der $Y_{\ell m}$ kann von den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^\ell Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) d^3\vec{r}$$

nur $q_{00} \neq 0$ sein. 1 P

- (c) 4,5 P Weil es nur einen Monopolanteil gibt, ist das Feld außerhalb der Kugel das gleiche wie das einer Punktladung Q (aus Teil (a) bekannt) im Mittelpunkt der Kugel (Gauß) 0,5 P.

Das Problem entspricht also dem einer Punktladung bei $\vec{r} = (x', y', a)$ vor einer geerdeten Ebene. Mit einer Spiegelladung $-Q$ bei $\vec{r}_S = (x', y', -a)$ verschwindet das Potential auf der Ebene 1 P.

Der Einfachheit halber setzen wir $x' = y' = 0$ und das Potential lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right]. \quad \text{1 P}$$

Die Oberflächenladungsdichte bestimmen wir aus der Senkrechtkomponente E_\perp des \vec{E} -Feldes auf der Oberfläche,

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 E_\perp(z = 0) = \epsilon_0 E_z(z = 0) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad \text{1 P}$$

Wir berechnen also die gesuchte Oberflächenladungsdichte

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{2(z - a)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}^3} - \frac{2(z + a)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}^3} \right] \Bigg|_{z=0} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{-2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} = -\frac{\rho_0 R^5 a}{15\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} \quad \text{1 P} \end{aligned}$$

Formelsammlung:

- Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , & Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta , & Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} , \\
 Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) , & Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} , & Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} , \\
 Y_{l,-m} &= (-1)^m Y_{lm}^* .
 \end{aligned}$$

- Rotation des Feldes $\vec{A} = (A_r, A_\vartheta, A_\varphi)$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{A} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \\
 &\quad + \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \\
 &\quad + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] .
 \end{aligned}$$