Aufgabe 1: Kurzfragen $\boxed{\textbf{3 P}}$

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Welches Grundprinzip steckt hinter der Kontinuitätsgleichung? Leiten Sie die Gleichung aus den kovarianten Maxwell-Gleichungen ab.

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Die kinetische Energie eines π^+-Meson in einem Inertialsystem sei 2/3 seiner Ruheenergie. Geben Sie die Geschwindigkeit des Pions (in Bruchteilen von c) an.

Lösung der Aufgabe 1

(a) $\boxed{1\text{ P}}$

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu$$

Die linke Seite erfüllt $\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$. Somit folgt unmittelbar die Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$ $\boxed{0{,}5\text{ P}}$.

Das dahinterliegende Grundprinzip ist Ladungserhaltung! $\boxed{0{,}5\text{ P}}$ (vll auch differentielle Form mit ρ und $\vec{j}$ oder sogar integrale Form mit Fluss durch Oberfläche....)

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Die kinetische Energie E_{kin} ergibt sich aus der relativitischen Energie $E = \gamma E_0$ mit Ruheenergie E_0 nach

$$\gamma E_0 = E = E_{kin} + E_0 = E_{kin} + E_0 = \left(\frac{2}{3} + 1\right) E_0 = \frac{5}{3} E_0 \quad \boxed{1{,}0\text{ P}}.$$

Daraus folgt $\gamma = 5/3$ und weiter

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{4}{5} c \quad \boxed{1{,}0\text{ P}}.$$

Aufgabe 2: Magnetfeld einer azimuthalsymmetrischen Stromdichte $\boxed{\textbf{9 P}}$

Gegeben ist die Stromdichte $\vec{j}$ in Kugelkoordinaten

$$\vec{j}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{j_0}{R} r \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \Theta(R - r) \hat{\varphi}$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ und $\hat{\varphi} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$.

(a) $\boxed{6\text{ P}}$ Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für $r > R$. Zeigen Sie, dass $\vec{A}(\vec{r})$ die Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_0 r^{-k} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \hat{\varphi}$$

hat.

Hinweis:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \ ,$$

wobei $r_< = \min(|\vec{r}|,|\vec{r}'|), r_> = \max(|\vec{r}|,|\vec{r}'|)$.

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Bestimmen Sie das $\vec{B}$-Feld für $r > R$.

Lösung der Aufgabe 2

(a) $\boxed{6\text{ P}}$ Wir berechnen direkt das Vektorpotential mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3\vec{r}' \ .$$

Wir setzen die Entwicklung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ nach Kugelflächenfunktionen (s. Aufgabenblatt) ein. Da wir $\vec{A}$ nur für $r > R$ suchen, gilt immer $r_> = r$, $r_< = r'$. Damit bekommen wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{r}' r'^l Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi')\vec{j}(\vec{r}')}_{=I} \ . \quad \boxed{1\text{ P}}$$

Die Stufenfunktion beschränkt lediglich die $\vec{r}'$ Integration. Mit der Beobachtung

$$Y_{21}(\Omega) + Y_{2,-1}(\Omega) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\left(-\mathrm{e}^{i\varphi}+\mathrm{e}^{-i\varphi}\right) = -2i\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi \ , \quad \boxed{0{,}5\text{ P}}$$

$$Y_{21}(\Omega) - Y_{2,-1}(\Omega) = -2\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi \ , \quad \boxed{0{,}5\text{ P}}$$

(Ω ist der Raumwinkel (ϑ,φ)) können wir den Integranden umformen,

$$I = -\frac{j_0}{R}\int_0^R \mathrm{d}r' r'^{l+3}\int \mathrm{d}\Omega' \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{lm}^*(\Omega') \begin{pmatrix} i(Y_{21}(\Omega')+Y_{2,-1}(\Omega')) \\ Y_{21}(\Omega')-Y_{2,-1}(\Omega') \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1\text{ P}}$$

Das Integral über Ω' lösen wir mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}^*(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

und erhalten insgesamt

$$I = \frac{j_0}{R}\frac{R^{l+4}}{2(l+4)}\sqrt{\frac{8\pi}{15}} \begin{pmatrix} -i(\delta_{l,2}\delta_{m,1}+\delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ -(\delta_{l,2}\delta_{m,1}-\delta_{l,2}\delta_{m,-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \ . \quad \boxed{1\text{ P}}$$

Setzen wir nun in $\vec{A}(\vec{r})$ ein, so bleiben uns wegen der Kronecker Symbole jeweils nur zwei Terme aus der Summe, beide mit $l = 2$. Das ergibt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0}{R}\frac{\mu_0 R^6}{2\cdot 6}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{1}{5}\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix}-i(Y_{21}(\Omega)+Y_{2,-1}(\Omega))\\ -(Y_{21}(\Omega)-Y_{2,-1}(\Omega))\\ 0\end{pmatrix} = \frac{j_0\mu_0 R^5}{60r^3}\begin{pmatrix}-2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\\ 2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \,. \quad \boxed{1\text{ P}}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ hat also die gesuchte Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{j_0\mu_0 R^5}{30r^3}\sin\vartheta\cos\vartheta\vec{e}_\varphi = \frac{A_0}{r^3}\sin\vartheta\cos\vartheta\vec{e}_\varphi \,. \quad \boxed{1\text{ P}}$$

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Wir berechnen $\vec{B}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten direkt aus $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ in Kugelkoordinaten. Da $\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, A_\varphi(r,\vartheta))$ tragen nur zwei Terme zur Rotation bei,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \quad \boxed{1\text{ P}}\\ &= \vec{e}_r\frac{A_0}{r\sin\vartheta}\left(\frac{2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{r^3} + \frac{-\sin^3\vartheta}{r^3}\right) - \vec{e}_\vartheta\frac{A_0}{r}\frac{(-2\sin\vartheta\cos\vartheta)}{r^3}\\ &= \frac{j_0\mu_0 R^5}{30r^4}\left((3\cos^2\vartheta - 1)\vec{e}_r + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\vec{e}_\vartheta\right) \,. \quad \boxed{2\text{ P}}\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Kugel vor einer Ebene $\boxed{8\text{ P}}$

Eine Vollkugel vom Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases}\rho_0(R-r)^2 & r \le R\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (r = |\vec{r}|) \,.$$

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Berechnen Sie die Ladung und das Dipolmoment der Kugel.

(b) $\boxed{1{,}5\text{ P}}$ Welche Werte haben die Multipolmomente $q_{\ell m}$ mit $\ell > 1$?

(c) $\boxed{4{,}5\text{ P}}$ Die Kugel befinde sich bei $z = a > R$ vor der geerdeten x–y–Ebene. Wie lautet die induzierte Oberflächenladungsdichte auf der Ebene?

Lösung der Aufgabe 3

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Ladung:

$$\begin{aligned}Q &= \int\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r} = \int\rho(r)r^2\,dr\int d\Omega = 4\pi\rho_0\int_0^R\left(r^4 - 2Rr^3 + R^2r^2\right)dr\\ &= 4\pi\rho_0\left(\frac{1}{5}R^5 - 2\frac{R}{4}R^4 + \frac{R^2}{3}R^3\right) = \frac{2\pi\rho_0 R^5}{15} \,.\boxed{1\text{P}}\end{aligned}$$

Dipolmoment:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int \vec{r}\rho(r)\, d^3\vec{r} = \int -\vec{r}\rho(-r)\, d^3\vec{r} \underbrace{=}_{\text{radialsymm.}} -\int \vec{r}\rho(r)\, d^3\vec{r}\, . = -\vec{p}$$

Also muss $\vec{p} = 0$ sein. $\boxed{\text{1P}}$

(b) $\boxed{\text{1,5 P}}$ Die Ladungsdichte ist kugelsymmetrisch (also nicht von ϑ, φ abhängig) und hat daher nur einen Monopolterm $\boxed{\text{0,5P}}$.
Begründung: Die Entwicklung des Winkelanteils der Ladungsdichte $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ nach Kugelflächenfunktionen enthält nur den Term proportional $Y_{00}(\vartheta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$. Wegen der Orthogonalität der $Y_{\ell m}$ kann von den sphärischen Multipolmomenten

$$q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}) r^{\ell} Y^{*}_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)\, d^3\vec{r}$$

nur $q_{00} \neq 0$ sein. $\boxed{\text{1P}}$

(c) $\boxed{\text{4,5 P}}$ Weil es nur einen Monopolanteil gibt, ist das Feld außerhalb der Kugel das gleiche wie das einer Punktladung Q (aus Teil (a) bekannt) im Mittelpunkt der Kugel (Gauß) $\boxed{\text{0,5 P}}$.
Das Problem entspricht also dem einer Punktladung bei $\vec{r} = (x', y', a)$ vor einer geerdeten Ebene. Mit einer Spiegelladung $-Q$ bei $\vec{r}_S = (x', y', -a)$ verschwindet das Potential auf der Ebene $\boxed{\text{1P}}$.
Der Einfachheit halber setzen wir $x' = y' = 0$ und das Potential lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}\right] . \quad \boxed{\text{1P}}$$

Die Oberflächenladungsdichte bestimmen wir aus der Senkrechtkomponete $E_\perp$ des $\vec{E}$–Feldes auf der Oberfläche,

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 E_\perp(z = 0) = \epsilon_0 E_z(z = 0) = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{z=0} . \quad \boxed{\text{1P}}$$

Wir berechnen also die gesuchte Oberflächenladungsdichte

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{Q}{4\pi}\left.\left[\frac{2(z-a)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}^3} - \frac{2(z+a)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}^3}\right]\right|_{z=0} \\ &= \frac{Q}{4\pi}\frac{-2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} = -\frac{\rho_0 R^5 a}{15\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}^3} \quad \boxed{\text{1P}} \end{aligned}$$

Formelsammlung:

- Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \,, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \,, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi} \,,$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\vartheta - \frac{1}{2} \right) , Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{i\varphi} , Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta e^{2i\varphi} \,,$$

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y^*_{lm} \,.$$

- Rotation des Feldes $\vec{A} = (A_r, A_\vartheta, A_\varphi)$ in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} =& \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi} \right] \\ &+ \vec{e}_\vartheta \left[\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\, r} (r A_\varphi) \right] \\ &+ \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial\, r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} \right] \,. \end{aligned}$$