Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 0

Ausgabe: Mi, 18.10.17 – Abgabe: — – Besprechung: Mi, 25.10.17

Aufgabe 1: Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformationen folgender Funktionen für $a > 0$:

(a) $f_a(t) = e^{-a|t|}$,

(b) $f_b(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$.

Lösung der Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \left(e^{-\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}\omega t} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} 2\cos(\omega t) \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\left[\frac{2}{\omega\sqrt{2\pi}} e^{-at} \sin(\omega t) \right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{2a}{\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin(\omega t) \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} - \underbrace{\left[\frac{2a}{\omega^2\sqrt{2\pi}} e^{-at} \cos(\omega t) \right]_0^{+\infty}}_{2a/(\omega^2\sqrt{2\pi})} - \frac{a^2}{\omega^2} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(\omega t) \mathrm{d}t}_{\mathcal{F}_a(\omega)}
\end{aligned}$$

Umstellen der Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{a^2}{\omega^2}\right) \mathcal{F}_a(\omega) &= \frac{2a}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \\
\mathcal{F}_a(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

(b) (i) Für den ersten Lösungsweg verwenden wir, dass f_b, die Fouriertransformierte von f_a ist:

$$\mathcal{F}_b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_a(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} f_a(-\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-a|\omega|}$$

(ii) Für den zweiten Lösungsweg benutzen wir den Residuensatz für gebrochenrationale Funktionen $f(z)$ mit $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ mit Exponentialfunktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{\mathrm{i}bz}dz = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} \sum\limits_{b\in\mathbb{H}^+} \mathrm{Res}_b e^{\mathrm{i}bz} f(z), & \text{für } b > 0 \\ -2\pi\mathrm{i} \sum\limits_{b\in\mathbb{H}^-} \mathrm{Res}_b e^{\mathrm{i}bz} f(z), & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

wobei $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die untere Halbebene ist. Bestimmung des Residuums einer Polstelle n-ter Ordnung:

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+t^2} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a+\mathrm{i}t} + \frac{1}{a-\mathrm{i}t}\right) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Abhängig ω müssen nun verschiedene Polstellen berücksichtigt werden

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}a} f &= \lim_{z\to -\mathrm{i}a} \left[\mathrm{i}(a-\mathrm{i}z)f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to -\mathrm{i}a} \mathrm{i} \left(1 + \frac{a-\mathrm{i}z}{a+\mathrm{i}z}\right) e^{-\mathrm{i}\omega z} = \mathrm{i}e^{-a\omega} \\ \mathrm{Res}_{\mathrm{i}a} f &= \lim_{z\to \mathrm{i}a} \left[-\mathrm{i}(a+\mathrm{i}z)f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to \mathrm{i}a} -\mathrm{i} \left(1 + \frac{a+\mathrm{i}z}{a-\mathrm{i}z}\right) e^{-\mathrm{i}\omega z} = -\mathrm{i}e^{a\omega} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des obigen Residuensatzes gilt nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b(\omega) &= \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-a\omega}, & \text{für } \omega > 0 \\ \sqrt{2\pi} e^{a\omega}, & \text{für } \omega < 0 \end{cases} \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-a|\omega|} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Die Diracsche δ-Funktion

(a) Leiten Sie mit Hilfe des Fourier'schen Integraltheorems die folgende Darstellung der δ-Funktion her:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} \mathrm{d}k\,.$$

Wie lautet die entsprechende Darstellung im dreidimensionalem Raum?

(b) Skizzieren Sie eine Stammfunktion der $\delta(x)$-Funktion.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Die Fouriertransformation und ihre Inverse lauten:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k\,,$$
$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x\,.$$

Kombiniert man beide Transformationen erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{\mathrm{i}k(x-x')} \mathrm{d}x' \mathrm{d}k, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{-\mathrm{i}kx} e^{\mathrm{i}kx} \right]}_{\delta(x-x')}\,. \end{aligned}$$

(b) Die Funktion $\delta(x)$ hat nimmt folgende Werte an.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty \text{ für } x = 0 \\ 0 \text{ für } sonst \end{cases}$$

Dies bedeutet, die Steigung der Stammfunktion ist 0 im Bereich $x \neq 0$. Somit lässt sich eine Stammfunktion einfach bestimmen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$$

Diese Funktion entspricht der Heaviside-Funktion $\Theta(x)$.

Aufgabe 3: Rechenregeln der Diracsche δ-Funktion

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der δ-Funktion die Gültigkeit folgender Rechenregeln:

(a) $x\delta(x) = 0\,,$

(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t)\delta(y-t)\mathrm{d}t = \delta(x-y)\,,$

(c) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)\,,$

(d) $x\delta'(x) = -\delta(x)\,.$

Lösung der Aufgabe 3

$f(x)$ sei eine beliebige stetige Funktion.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)x}_{g(x)}\,\delta(x)\mathrm{d}x = g(0) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x\delta(x) = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\delta(x-t)\delta(y-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\delta(x-t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\delta(y-t)f(y)}_{f(t)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\delta(x-t)f(t) \\
&\overset{t\to y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y f(y)\delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\delta(x-t)\delta(y-t) = \delta(x-y)$$

(c) Hier nutzen wir folgende Substitution mit einer Konstanten a

$$x' = \begin{cases} ax \text{ für } a > 0 \\ -ax \text{ sonst} \end{cases}$$

um eine positive Integrationrichtung beizubehalten.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' f\left(\frac{x'}{a}\right)\delta(x') \\
&= \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \mathrm{d}x f(x) x\delta'(x) &\overset{P.I.}{=} \underbrace{\left[f(x)x\delta(x)\right]_a^b}_{=0 \text{ für } a,b\neq 0} - \int_a^b \mathrm{d}x \delta(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)x\right) \\
&= -\int_a^b \mathrm{d}x\delta(x)\left(\underbrace{f'(x)x}_{=0,\text{ siehe a)}} + f(x)\right) \\
&= -\int_a^b \mathrm{d}x\delta(x) f(x) \\
\Rightarrow \qquad x\delta'(x) &= -\delta(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: δ-Funktion einer Funktion $g(x)$

$g(x)$ sei eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen x_n $[g(x) = 0, g'(x) \neq 0]$. Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n)\,.$$

Lösung der Aufgabe 4

Die Integration wird in Intervalle I_i aufgeteilt, so dass in jedem höchstens eine Nullste x_i mit $g(x_i) = 0$ liegt und in jedem Intervall eine eindeutig umkehrbare Funktion $y = g(x)$ existiert mit $x = g^{-1}(y)$ und $\mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(g(x)) = \sum_i \int_{I_i} \mathrm{d}x f(x)\delta(g(x))\,.$$

Das zugehörige substituierte Intervall von I_i lautet I_i' Falls $g'(x)$ im Intervall I_i' negativ ist, subsistiert man $y \to -y$, um eine positive Intergrationsrichtung beizubehalten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(g(x)) &= \sum_i \int_{I_i} \frac{\mathrm{d}y}{|g'(g^{-1}(y))|} f(g^{-1}(y))\delta(y) \\
&= \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \sum_i \frac{f(x)}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i) \\
\Rightarrow \qquad \delta\left(g(x)\right) &= \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Nützliche Relationen zur Vektoranalysis

Beweisen Sie die folgende Relationen zweier Vektorfelder $\vec{a}(x)$ und $\vec{b}(x)$ im $\mathbb{R}^3$.

(a) Gradient des Skalarproduktes:

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b})\,.$$

(b) Divergenz eines Vektorproduktes:

$$\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})\,.$$

(c) Rotation einer Rotation:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \Delta\vec{a}\,.$$

Lösung der Aufgabe 5

Wir nutzen im folgenden die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über doppelt auftauchende Indizes wird vollständig summiert, sodass bspw. gilt:

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \vec{a}\cdot\vec{b}\ . \tag{1}$$

Wir nutzen, dass sich die i-te Komponente des Vektorprodukts zweier beliebiger Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ schreiben lässt als

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k\ , \tag{2}$$

wobei ϵ_{ijk} den total antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor darstellt. Für diesen nutzen wir, dass für beliebige Indizes gilt, dass

$$\epsilon_{ijk} = (-1)^p \epsilon_{123}\ , \tag{3}$$

wobei p die Anzahl der paarweisen Index-Permutationen angibt, um die Indexreihenfolge von ijk auf 123 zu tauschen. Weiterhin nutzen wir, dass in der Summenkonvention gilt:

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\ . \tag{4}$$

(a) Wir betrachten die i-te Komponente der rechten Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a} + (\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b} + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + \vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right)\right]_i \\
&\overset{(2)}{=} b_j\partial_j a_i + a_j\partial_j b_i + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} b_j\partial_l a_m + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j\partial_l b_m \\
&\overset{(3)}{=} b_j\partial_j a_i + a_j\partial_j b_i + \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\left(b_j\partial_l a_m + a_j\partial_l b_m\right) \\
&\overset{(4)}{=} b_j\partial_j a_i + a_j\partial_j b_i + \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\left(b_j\partial_l a_m + a_j\partial_l b_m\right) \\
&= b_j\partial_j a_i + a_j\partial_j b_i + b_j\partial_i a_j + a_j\partial_i b_j - b_j\partial_j a_i - a_j\partial_j b_i \\
&\overset{(*)}{=} b_j\partial_i a_j + a_j\partial_i b_j = \partial_i\left(a_j b_j\right) \\
&\overset{(1)}{=} \left[\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right]_i\ ,
\end{aligned} \tag{5}$$

sodass gilt:

$$\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}+(\vec{a}\cdot\nabla)\,\vec{b}+\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})+\vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right)=\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\ . \tag{6}$$

$\square$

Der Schritt in Zeile $(*)$ lässt sich auch nutzen, um die kompaktere Formel

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\nabla\vec{a}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\vec{b}+\left(\nabla\vec{b}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\vec{a} \tag{7}$$

herzuleiten, wobei zu beachten ist, dass $\nabla\vec{a}^{\mathrm{T}}$ und $\nabla\vec{b}^{\mathrm{T}}$ jeweils 3×3-Matrizen sind.

(b) Wir nutzen die Produktregel:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)&=\epsilon_{ijk}\partial_i\left(a_jb_k\right)=\epsilon_{ijk}b_k\left(\partial_ia_j\right)+\epsilon_{ijk}a_j\left(\partial_ib_k\right)\\&\overset{(*)}{=}\epsilon_{j'k'i'}b_{i'}\left(\partial_{j'}a_{k'}\right)+\epsilon_{j'i'k}a_{i'}\partial_{j'}b_k\\&\overset{(*)}{=}\epsilon_{jki}b_i\left(\partial_ja_k\right)+\epsilon_{jik}a_i\partial_jb_k\\&\overset{(3)}{=}\epsilon_{ijk}b_i\left(\partial_ja_k\right)-\epsilon_{ijk}a_i\left(\partial_jb_k\right)\\&\overset{(2)}{=}\vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a})-\vec{a}\cdot\left(\nabla\times\vec{b}\right)\ ,\end{aligned} \tag{8}$$

$\square$

wobei wir in $(*)$ mehrfach die Indizes umbenannt haben, über welche summiert wird.

(c) Wir betrachten die i-te Komponente der linken Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}\left[\nabla\times(\nabla\times\vec{a})\right]_i&\overset{(2)}{=}\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_la_m\overset{(3)}{=}\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_la_m\\&\overset{(4)}{=}\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j\partial_la_m=\partial_j\partial_ia_j-\partial_j\partial_ja_i=\partial_i\partial_ja_j-\partial_j\partial_ja_i\\&\overset{(1)}{=}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)-\Delta\vec{a}\right]_i\ ,\end{aligned} \tag{9}$$

sodass gilt:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a})=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)-\Delta\vec{a}\ . \tag{10}$$

$\square$