Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Ausgabe: Fr, 27.10.17 – Abgabe: Fr, 03.11.17 – Besprechung: Mi, 08.11.17

Aufgabe 1: Anwendungen von ∇ $\boxed{\text{4 P}}$

Berechnen Sie folgende Ableitungen für $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und $r = |\vec{r}|$

(a) $\nabla \cdot \vec{r}$,

(b) ∇r^α,

(c) $\nabla \times \vec{r}$,

(d) $\nabla f(r)$.

Lösung der Aufgabe 1

Konventionen:

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_i \vec{e}_i = r\vec{e}_r;\ r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};\ \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i$$

(a)

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = 3$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot r^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\alpha/2} \vec{e}_i \\ &= \alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\alpha/2-1} x_i \vec{e}_i = \alpha r^{\alpha-2}\vec{r} \\ &= \alpha r^{\alpha-1}\vec{e}_r\end{aligned}$$

(c)

$$\nabla \times \vec{r} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ijk} x_k = \varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\vec{e}_i = \varepsilon_{ijj}\vec{e}_i = \vec{0}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\nabla f(r) &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(r)\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(r(x_1, x_2, x_3)\right)\vec{e}_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\vec{e}_i = \frac{\partial f}{\partial r}\nabla r \\
&\overset{\text{b)}}{=} \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Elektrisches Feld des Wasserstoff-Atoms $\boxed{\textbf{7 P}}$

Für die Ladungswolke des Elektrons des H-Atoms im Grundzustand kann näherungsweise die Dichte

$$\rho_{el} = -\kappa e^{-2r/a_B}$$

angenommen werden (a_B : Bohr'scher Radius). Das Proton mit Ladung $q = +e$ sei hierbei als punktförmig und im Ursprung zentriert angenommen.

(a) Bestimmen Sie κ.

(b) Berechnen Sie die Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ des gesamten Wasserstoffatoms unter Benutzung des Gauß'schen Gesetzes.

(c) Bestimmen Sie nun das Potential $\Phi(\vec{r})$ und diskutieren Sie von diesem die Grenzfälle $r \ll a_B$ und $r \gg a_B$.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Die Gesamtladung der Ladungswolke ist $-1e$. Das Problem lässt sich am besten in Kugelkoordinaten beschreiben:

$$
\begin{aligned}
Q = -1e &= \int \mathrm{d}V \left(-\kappa e^{-2r/a_B}\right) \\
&= -\int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta r^2 \sin(\vartheta)\kappa e^{-2r/a_B} \\
&= -4\pi\kappa \int_0^\infty \mathrm{d}r r^2 e^{-2r/a_B}
\end{aligned}
$$

Das Integral betrachtet wir nun im speziellen:

$$\begin{aligned}
\int_0^R \mathrm{d}x x^2 e^{-\beta x} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\int_0^R \mathrm{d}x e^{-\beta x} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left[-\frac{1}{\beta}\left(e^{-\beta R}-1\right)\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left[\frac{1}{\beta^2}\left(e^{-\beta R}-1\right)+\frac{R}{\beta}e^{-\beta R}\right] \\
&= -\frac{2}{\beta^3}\left(e^{-\beta R}-1\right)-\frac{2R}{\beta^2}e^{-\beta R}-\frac{R^2}{\beta}e^{-\beta R} \\
&= \frac{2}{\beta^3}-\underbrace{e^{-\beta R}\left(\frac{2}{\beta^3}+\frac{2R}{\beta^2}+\frac{R^2}{\beta}\right)}_{\to 0 \text{ für } \beta>0, R\to\infty}.
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned}
-1e &= -4\pi\kappa\frac{a_B^3}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \kappa &= \frac{e}{\pi a_B^3}
\end{aligned}$$

(b) Unter Berücksichtigung des Wasserstoffatoms im Ursprung ist die Gesamte Ladungsdichteverteilung gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{e}{\pi a_B^3}e^{-2r/a_B}+\frac{e}{4\pi r^2}\delta(r)\,.$$

Nach Gauß'schen Satz und Gauß'schen Gesetz (1.Maxwell-Gleichung) gilt:

$$\int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot\vec{E} = \int_S \mathrm{d}S\vec{E}\cdot\vec{n} = \int_V \mathrm{d}V\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\,.$$

Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist, besitzt das Potential und das elektrische Feld nur eine Radialkomponente

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r\vec{e}_r,$$

mit dem Einheitvektor in Radialrichtung $\vec{e}_r$. Mit der Wahl von V als Volumen einer Kugel mit Ursprung 0 und Radius r, beschreibt S die Kugeloberfläche.

$$\int_S \mathrm{d}S\vec{E}\cdot\vec{n} = \int_0^\pi \mathrm{d}\Theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi E_r r^2\sin\Theta = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Auf der anderen Seite ist das Volumenintegral über die Ladungsdichteverteilung:

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}V\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\Theta\int_0^r \mathrm{d}r' r'^2\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\
&= -\left(\frac{4\pi e}{\varepsilon_0\pi a_B^3}\int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 e^{-2r/a_B}\right)+\frac{e}{\varepsilon_0} \\
&\overset{\text{a)}}{=} -\frac{4e}{\varepsilon_0 a_B^3}\left[\frac{a_B^3}{4}-e^{-2r/a_B}\left(\frac{a_B^3}{4}+\frac{a_B^2 r}{2}+\frac{a_B r^2}{2}\right)\right]+\frac{e}{\varepsilon_0} \\
&= \frac{e}{\varepsilon_0}e^{-2r/a_B}\left(1+\frac{2r}{a_B}+\frac{2r^2}{a_B^2}\right)
\end{aligned}$$

Damit kann nun das elektrische Feld bestimmt werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} e^{-2r/a_B} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{a_B r} + \frac{2}{a_B^2} \right) \vec{e}_r$$

(c) Das Potential ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi \\ \overset{1b)}{\Leftrightarrow} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ \Rightarrow \Phi &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} e^{-2r/a_B} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a_B} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{a_B} e^{-2r/a_B} & \text{für } r \gg a_B \\ \frac{1}{r} & \text{für } r \ll a_B \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Elektrisches Feld einer Kugelschale **6 P**

Betrachten Sie für $\alpha > 0$ die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r^2} & \text{für } R_1 < r < R_2\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

dieser kugelsymmetrischen Ladungsverteilung.

Hinweis: Wählen Sie $\vec{r}$ in z-Richtung und führen Sie die Integration in Kugelkoordinaten aus.

(b) Bestimmen Sie aus dem elektrostatischen Potential das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$

Lösung der Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\Theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}r' r'^2 \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\Theta \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}r' \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{aligned}$$

Da es sich um ein kugelsymmetrisches Problem handelt können wir $\vec{r}$ in z-Richtung wählen, um das Skalarprodukt, sodass

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\Theta\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'\frac{\alpha}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}}\\
&= \frac{2\pi\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\Theta\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\Theta}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}\left(-\frac{1}{rr'}\right)\\
&= -\frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'\left[\frac{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta}}{r'}\right]_{\cos\Theta=-1}^{1}\\
&= \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r}\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'\frac{|r+r'|-|r-r'|}{r'}\\
&= \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r}\begin{cases}\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'\frac{2r}{r'} & \text{für } r<R_1\\ \displaystyle\int_{R_1}^{r}\mathrm{d}r'2+\int_{r}^{R_2}\mathrm{d}r'\frac{2r}{r'} & \text{für } R_2>r\geq R_1\\ \displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{d}r'2 & \text{für } r\geq R_2\end{cases}\\
&= \frac{\alpha}{\varepsilon_0}\begin{cases}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) & \text{für } r<R_1\\ 1-\dfrac{R_1}{r}+\ln\left(\dfrac{R_2}{r}\right) & \text{für } R_2>r\geq R_1\\ \dfrac{R_2-R_1}{r} & \text{für } r\geq R_2\end{cases}
\end{aligned}
$$

Mit der Gesamtladung Q

$$
\begin{aligned}
Q &= \int\mathrm{d}V\,\rho(\vec{r}) = 4\pi\alpha(R_2-R_1)\\
\Leftrightarrow\qquad \alpha &= \frac{Q}{4\pi(R_2-R_1)}
\end{aligned}
$$

lässt sich das Potential zu folgenden Ausdruck vereinfachen:

$$
\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)/(R_2-R_1) & \text{für } r<R_1\\ \left[1-\dfrac{R_1}{r}+\ln\left(\dfrac{R_2}{r}\right)\right]/(R_2-R_1) & \text{für } R_2>r\geq R_1\\ \dfrac{1}{r} & \text{für } r\geq R_2\end{cases}
$$

(b) Das dazugehörige E-Feld ist zeigt in Radialrichtung und besitzt den Wert

$$
\begin{aligned}
E(\vec{r}) &= -\nabla\Phi \overset{1d)}{=} -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \\
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 \\ \left[-\frac{1}{r} + \frac{R_1}{r^2}\right]/(R_2 - R_1) & \text{für } R_2 > r \geq R_1 \\ -\frac{1}{r^2} & \text{für } r \geq R_2 \end{cases} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 \\ \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} & \text{für } R_2 > r \geq R_1 \\ 1 & \text{für } r \geq R_2 \end{cases} \\
&= \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r^2}\begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1 \\ r - R_1 & \text{für } R_2 > r \geq R_1 \\ R_2 - R_1 & \text{für } r \geq R_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Symmetrie der Green'schen Funktion **3 P**

Zeigen Sie mit Hilfe einer Green'schen Identität, dass die Green'sche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{x}\,')$ der Poisson Gleichung mit Dirichlet Randbedingungen in ihren Argumenten symmetrisch ist:

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') = G_D(\vec{x}\,', \vec{x})\,.$$

Was bedeutet dies physikalisch?

Lösung der Aufgabe 4

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\nabla'^2 G(\vec{x}, \vec{x}') &= -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\,, \\
G(\vec{x}, \vec{x}') &= 0 \text{ für } \vec{x}' \in S
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Green'schen Identität (Satz) kann folgende Relation hergeleitet werden:

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{y}\,\Big(G(\vec{x}, \vec{y})\nabla_y^2 G(\vec{x'}, \vec{y}) + \nabla_y G(\vec{x}, \vec{y})\nabla_y G(\vec{x}', \vec{y})\Big) = \oint_S \mathrm{d}S\ \underbrace{G(\vec{x}, \vec{y})}_{=0 \text{ für } \vec{n} \in S}\ \frac{\partial G(\vec{x}', \vec{y})}{\partial n} = 0\,.$$

Analog gilt

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{y}\,\big(G(\vec{x}', \vec{y})\nabla_y^2 G(\vec{x}, \vec{y}) + \nabla_y G(\vec{x}', \vec{y})\nabla_y G(\vec{x}, \vec{y})\big) = 0\,.$$

Somit können beiden Gleichungen in Relation gesetzt werden, wobei sich der hintere Teil wegkürzt:

$$
\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}^3\vec{y}\, G(\vec{x}, \vec{y})\underbrace{\nabla_y^2 G(\vec{x}', \vec{y})}_{-4\pi\delta(\vec{x}'-\vec{y})} &= \int_V \mathrm{d}^3\vec{y}\, G(\vec{x}', \vec{y})\underbrace{\nabla_y^2 G(\vec{x}, \vec{y})}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{y})} \\
\Leftrightarrow \qquad G(\vec{x}, \vec{x}') &= G(\vec{x}', \vec{x})
\end{aligned}
$$

Dieses Relation spiegelt die Symmetrie zwischen Rolle der Ladung und Rolle des Messpunktes wider ($\sim$ "Actio = Reactio").