

Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

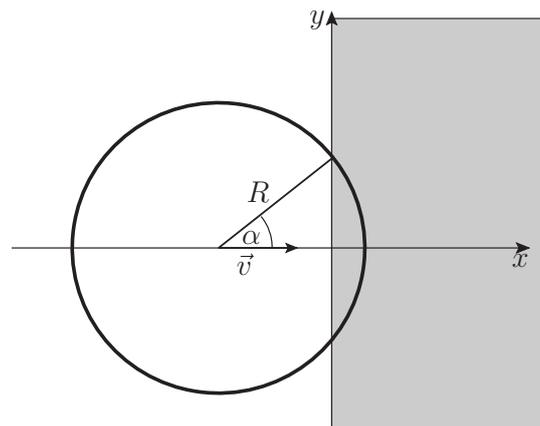
Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 10

Ausgabe: Fr, 12.01.18 – Abgabe: Fr, 19.01.17 – Besprechung: Mi, 24.01.18

Aufgabe 29: Induktion in bewegter kreisförmiger Leiterschleife 6 P

Eine kreisförmige Leiterschleife bewegt sich innerhalb der x - y -Ebene mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{x}$. Im Bereich $x > 0$ wirkt ein homogenes Magnetfeld $B_0\hat{z}$, das in der Zeichnung durch grauen Hintergrund dargestellt wird. Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung $U(t)$. Skizzieren Sie $U(t)$.



Lösung der Aufgabe 29

Zunächst bestimmen wir die Fläche der Leiterschleife im Magnetfeld, d.h. die Differenz eines Kreissegmentes und des Dreiecks:

$$a(\alpha) = R^2\alpha - R^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = R^2(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)).$$

Durch die Bewegung ist α zeitabhängig:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha(t)) &= \frac{R - vt}{R} \\ \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)) &= \frac{v}{R} \\ \Rightarrow \frac{da(\alpha)}{dt} &= \frac{da(\alpha)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{da(\alpha)}{d\alpha} \frac{v}{R \sin(\alpha)} \\ &= R^2(1 + \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)) \frac{v}{R \sin(\alpha)} \\ &= 2vR \sin(\alpha) = 2vR \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \\ &= 2vR \sqrt{1 - \frac{(R - vt)^2}{R^2}} = 2vR \sqrt{\frac{vt}{R} \left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \end{aligned}$$

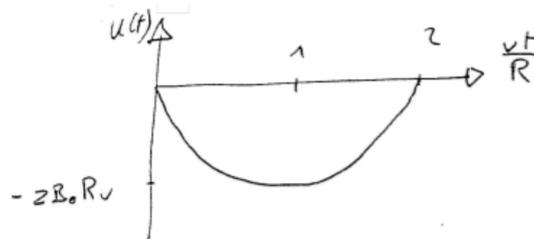
Damit ist der magnetische Fluss:

$$\Phi_m(t) = \int d\vec{a} \cdot \vec{B} = B_0 a(\alpha(t))$$

und somit die induzierte Ringspannung:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B_0 \frac{da(\alpha)}{dt} \\ &= -2B_0 v R \sqrt{\frac{vt}{R} \left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{U}{2B_0 v R} &= -\sqrt{\frac{vt}{R} \left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{U}{2B_0 v R} \equiv \eta &= -\sqrt{\xi(2 - \xi)} \end{aligned}$$

mit $\xi = \frac{vt}{R}$ beschreibt diese Gleichungen einen unteren Halbkreis in der ξ - η Ebene mit Radius $r = 1$ um den Mittelpunkt ($\xi = 1, \eta = 0$).



Aufgabe 30: Eindimensionale Wellengleichung

6 P

Eine Funktion $u(x, t)$ soll die eindimensionale Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &\equiv a(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &\equiv b(x) = -\frac{N}{\delta^2} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right) \end{aligned}$$

lösen. Bestimmen Sie $u(x, t)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left(\tilde{A}(k) e^{i(kx + \omega t)} + \tilde{B}(k) e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

aus den gegebenen Randbedingungen per Fourier-Transformation.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstanten N von $u(x, 0)$ und nutzen Sie folgende Relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ für } a > 0.$$

Lösung der Aufgabe 30

Aus der Normierungsbedingung folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |u(x, 0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |a(x)|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |N|^2 e^{-\frac{x^2}{\delta^2}} \\ &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} |N|^2 |\delta\sqrt{\pi}| \\ \Rightarrow |N| &= \frac{1}{\sqrt{\delta\pi}^{1/4}} \end{aligned}$$

Nun nutzen wir den Ansatz

$$u(x, t) = A(x)e^{i\omega t} + B(x)e^{-i\omega t}$$

und bestimmen A und B mit Hilfe der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= A(x) + B(x) = a(x) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{i\omega}{c} (A(x)e^{i\omega t} - B(x)e^{-i\omega t}) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{i\omega}{c} (A(x) - B(x)) = b(x) = \frac{da(x)}{dx} \end{aligned}$$

Mit den Fouriertransformationen

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx A(x) e^{-ikx} \\ A(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{A}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

gilt für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \underbrace{(\tilde{A}(k) + \tilde{B}(k))}_{\tilde{a}(k)} e^{ikx} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{ikx}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{i\omega}{c} (\tilde{A}(k) - \tilde{B}(k)) e^{ikx} &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{ikx} \\ &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Mit $\frac{\omega}{c} = k$ ist somit

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{A}(k) - \tilde{B}(k) &= \tilde{a}(k) \\ \Rightarrow \tilde{B}(k) &= 0, \tilde{A}(k) = \tilde{a}(k) \\ \Rightarrow u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{ikx} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Jedoch ist $\omega = ck$, d.h. wir müssen noch die Fourier-Transformation von $\tilde{a}(k)e^{ikct}$ berechnen. Zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{a}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx N e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}} e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx N e^{-ikx - \frac{x^2}{2\delta^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx N e^{-\frac{1}{2\delta^2}(x^2 + 2ikx\delta^2 - k^2\delta^4 + k^2\delta^4)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx N e^{-\frac{1}{2\delta^2}(x + ik\delta^2)^2 - \frac{k^2\delta^2}{2}} \\ &\stackrel{\text{Cauchy'scher Integralsatz}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' N e^{-\frac{1}{2\delta^2}x'^2} e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}} \end{aligned}$$

Damit ist nun

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}} e^{ik(x+ct)} \\ &\stackrel{x''=x+ct}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{\delta^2}{2}(k^2 - 2\frac{ikx''}{\delta^2} - \frac{x''^2}{\delta^2} + \frac{x''^2}{\delta^2})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{\delta^2}{2}(k^2 - 2\frac{ikx''}{\delta^2} - \frac{x''^2}{\delta^4} + \frac{x''^2}{\delta^4})} \\ &= \frac{N\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{\delta^2}{2}(k - \frac{ikx''}{\delta^2})^2} e^{-\frac{x''^2}{2\delta^2}} \\ &= \frac{N\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} e^{-\frac{x''^2}{2\delta^2}} \\ &= N e^{-\frac{(x+ct)^2}{2\delta^2}} \end{aligned}$$

Dies entspricht einem Gauß-Paket, welches nach links läuft.

Aufgabe 31: Reflexion ebener Wellen an einer Metallwand

8 P

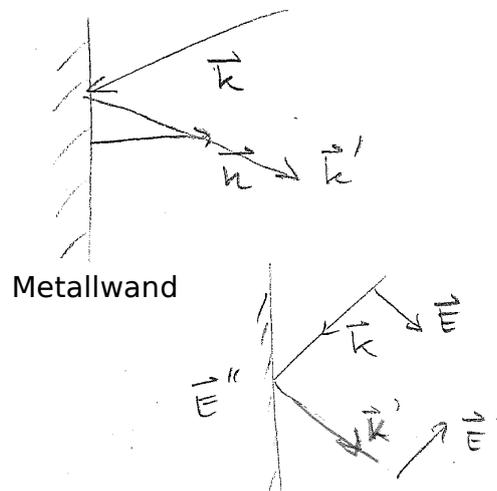
Eine ebene Welle $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ falle auf eine ideal leitende ebene Metallwand mit Normalenvektor \vec{n} . Die reflektierte Welle lautet $\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0 e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r} - i\omega t}$

- Drücken Sie \vec{k}' und \vec{E}'_0 durch \vec{n} , \vec{k} und \vec{E}_0 aus.
- Die Welle falle senkrecht zur Metallwand ein. Berechnen Sie Energiedichte und Energiestrom der stehenden Gesamtwelle. Was ergibt sich im zeitlichen Mittel?

Hinweis: Sie können folgendes Additionstheorem nutzen:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1.$$

Lösung der Aufgabe 31



(a)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0 e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r} - i\omega t}$$

An der Grenzfläche ist \vec{E}_{\parallel} stetig. Da Metall ein perfekter Leiter ist, verschwindet dort das \vec{E} -Feld.

$$\Rightarrow \vec{E}_{\parallel}''(\vec{r}) = \vec{0} = \vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) + \vec{E}_{\parallel}'(\vec{r})$$

Mit der Aufteilung

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E} - \vec{E}_{\perp} = \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}' - \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' - (\vec{E}' \cdot \vec{n}') \cdot \vec{n}'$$

kann man die Felder einsetzen:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel,0} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r} - i\omega t} &= -\vec{E}_{\parallel,0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} \\ \Rightarrow \vec{E}'_{\parallel,0} &= \underbrace{-\vec{E}_{\parallel,0} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}}}_{\text{konst.} \Rightarrow (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} \text{ konst.}} \end{aligned}$$

Da \vec{E}_0 unabhängig von \vec{r} ist, muss $\vec{k} - \vec{k}'$ orthogonal zu \vec{r} (der Ursprung von \vec{r} liegt auf der Ebene) sein:

$$\begin{aligned} (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{k} - \vec{k}' &= C\vec{n} \end{aligned}$$

Multipliziert man die Gleichung jeweils mit \vec{k} und \vec{k}' ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') &= C\vec{k} \cdot \vec{n} \\ \vec{k}' \cdot (\vec{k} - \vec{k}') &= C\vec{k}' \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{k}^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}' + -\vec{k}' \cdot \vec{k} - \vec{k}'^2 &= 2C(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit in der zeitlichen Entwicklung, gilt an der Grenzfläche:

$$\vec{k}'^2 = \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}0 &= 2C(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{n} &= -\vec{k}' \cdot \vec{n} \\ \Rightarrow C &= \vec{n} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = 2(\vec{n} \cdot \vec{k}) \\ \Rightarrow \vec{k} - \vec{k}' &= 2(\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n} \\ \Rightarrow \vec{k}' &= \vec{k} - 2(\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n}\end{aligned}$$

und

$$\vec{E}'_{\parallel,0} = -\vec{E}_{\parallel,0}.$$

Im Vakuum gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \vec{E}' = 0 \\ \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{k} &= \vec{E}' \cdot \vec{k}' = 0\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 + \vec{E}'_0 &= \vec{E}_{\perp,0} + \vec{E}'_{\perp,0} + \underbrace{\vec{E}_{\parallel,0} + \vec{E}'_{\parallel,0}}_{=0} \\ \Rightarrow \vec{k} \left(\vec{E}_{\perp,0} + \vec{E}'_{\perp,0} \right) &= \vec{k}\vec{E}'_0 = \left(\vec{k}' + 2(\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n} \right) \vec{E}'_0 \\ \Rightarrow &= \left(2(\vec{n} \cdot \vec{k})\vec{n} \right) \vec{E}'_0 = 2\vec{k}\vec{E}'_{\perp,0} \\ \text{gilt für alle } \vec{k} \Rightarrow & \vec{E}'_{\perp,0} = \vec{E}_{\perp,0} \\ \Rightarrow & \vec{E}'_0 = -\vec{E}_0 + 2(\vec{E}_0 \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

(b) Sei $\vec{n} = -\hat{z}$ und $\vec{E}_0 = E_0\hat{x}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{k} &= k\hat{z} \\ \vec{E}'_0 &= -\vec{E}_0 \\ \vec{k}' &= \vec{k} - 2\vec{k} = -\vec{k}\end{aligned}$$

Somit ist das gesamte elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{ges}} = E_0 \hat{x} e^{-i\omega t} \underbrace{(e^{ikz} - e^{-ikz})}_{2i \sin(kz)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{phys,ges}} = \text{Re}(\vec{E}_{\text{ges}}) = E_0 \hat{x} 2 \sin(\omega t) \sin(kz)$$

Die Realteile der Felder stellen die physikalischen Felder dar. Das \vec{H} -Feld ist

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{z} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{ikz - i\omega t} \hat{y}$$

$$\vec{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (-\hat{z} \times \vec{E}') = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 e^{-ikz - i\omega t} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{ges}} = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-i\omega t} E_0 \cos(kz) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{phys,ges}} = \text{Re}(\vec{H}_{\text{ges}}) = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t) E_0 \cos(kz) \hat{y}$$

Damit ist die Energiedichte:

$$W = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}_{\text{phys,ges}}^2 + \mu_0 \vec{H}_{\text{phys,ges}}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[4\epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + 4\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) \right]$$

$$= 2\epsilon_0 E_0^2 \left[\sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left[(1 - \cos(2\omega t)) (1 - \cos(2kz)) + (1 + \cos(2\omega t)) (1 + \cos(2kz)) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left[2 + 2 \cos(2\omega t) \cos(2kz) \right]$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 \left[1 + \cos(2\omega t) \cos(2kz) \right]$$

In zeitlichen Mittel ist $\cos(2\omega t) \rightarrow 0$, damit ergibt sich:

$$\overline{W} = \epsilon_0 E_0^2$$

Die Energiestromdichte wird vom Poynting Vektor beschrieben:

$$\vec{S} = \vec{E}_{\text{phys,ges}} \times \vec{H}_{\text{phys,ges}}$$

$$= 4E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \hat{z}$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\vec{S} = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin(2kz) \sin(2\omega t) \hat{z}$$

Da der Poynting-Vektor zeitlich oszilliert, ergibt sich im zeitlichen Mittel:

$$\overline{\vec{S}} = \vec{0}$$