Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

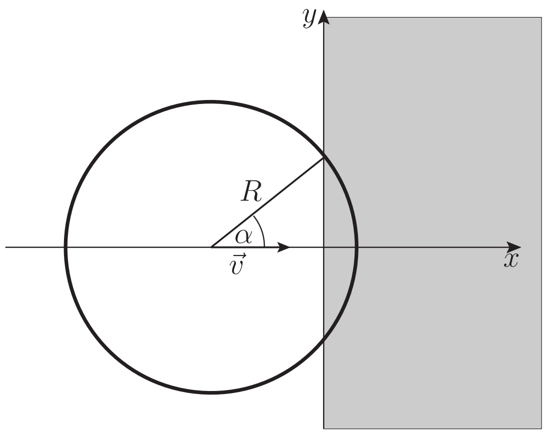
Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 10

Ausgabe: Fr, 12.01.18 – Abgabe: Fr, 19.01.17 – Besprechung: Mi, 24.01.18

Aufgabe 29: Induktion in bewegter kreisförmiger Leiterschleife $\boxed{\textbf{6 P}}$

Eine Kreisförmige Leiterschleife bewegt sich innerhalb der x-y-Ebene mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{x}$. Im Bereich $x > 0$ wirkt ein homogenes Magnetfeld $B_0\hat{z}$, das in der Zeichnung durch grauen Hintergrund dargestellt wird. Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung $U(t)$. Skizzieren Sie $U(t)$.



Lösung der Aufgabe 29

Zunächst bestimmen wir die Fläche der Leiterschleife im Magnetfeld, d.h. die Differenz eines Kreissegmentes und des Dreiecks:

$$a(\alpha) = R^2\alpha - R^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = R^2(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha))\,.$$

Durch die Bewegung ist α zeitabhängig:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha(t)) &= \frac{R - vt}{R} \\
\dot{\alpha}(t)\sin(\alpha(t)) &= \frac{v}{R} \\
\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\frac{v}{R\sin(\alpha)} \\
&= R^2(1 + \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha))\frac{v}{R\sin(\alpha)} \\
&= 2vR\sin(\alpha) = 2vR\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \\
&= 2vR\sqrt{1 - \frac{(R - vt)^2}{R^2}} = 2vR\sqrt{\frac{vt}{R}\left(2 - \frac{vt}{R}\right)}
\end{aligned}$$

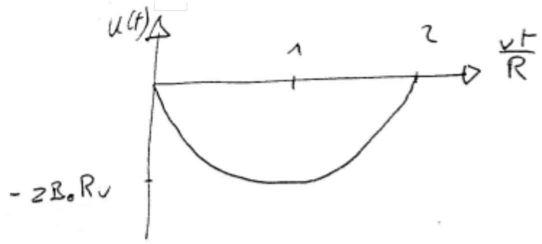
Damit ist der magnetische Fluss:

$$\Phi_m(t) = \int \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{B} = B_0 a(\alpha(t))$$

und somit die induzierte Ringspannung:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -B_0 \frac{\mathrm{d}a(\alpha)}{\mathrm{d}t} \\ &= -2B_0 vR\sqrt{\frac{vt}{R}\left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{U}{2B_0 vR} &= -\sqrt{\frac{vt}{R}\left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{U}{2B_0 vR} &\equiv \eta = -\sqrt{\xi\,(2-\xi)} \end{aligned}$$

mit $\xi = \frac{vt}{R}$ beschreibt diese Gleichungen einen unteren Halbkreis in der ξ-η Ebene mit Radius $r = 1$ um den Mittelpunkt $(\xi = 1, \eta = 0)$.



Aufgabe 30: Eindimensionale Wellengleichung **6 P**

Eine Funktion $u(x,t)$ soll die eindimensionale Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$u(x,0) \equiv a(x) = N \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} \equiv b(x) = -\frac{N}{\delta^2} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\delta^2}\right)$$

lösen. Bestimmen Sie $u(x,t)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\tilde{A}(k) e^{\mathrm{i}(kx+\omega t)} + \tilde{B}(k) e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right)$$

aus den gegebenen Randbedingungen per Fourier–Transformation.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstanten N von $u(x,0)$ und nutzen Sie folgende Relation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ für } a > 0\,.$$

Lösung der Aufgabe 30

Aus der Normierungsbedingung folgt:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |u(x,0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |a(x)|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |N|^2 e^{-\frac{x^2}{\delta^2}} \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} |N^2|\delta\sqrt{\pi} \\
\Rightarrow |N| &= \frac{1}{\sqrt{\delta}\pi^{1/4}}
\end{aligned}$$

Nun nutzen wir den Ansatz

$$u(x,t) = A(x)e^{\mathrm{i}\omega t} + B(x)e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

und bestimmen A und B mit Hilfe der Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= A(x) + B(x) = a(x) \\
\frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(A(x)e^{\mathrm{i}\omega t} - B(x)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(A(x) - B(x)\right) = b(x) = \frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Mit den Fouriertransfomationen

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x A(x) e^{-\mathrm{i}kx} \\
A(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{A}(k)e^{\mathrm{i}kx}
\end{aligned}$$

gilt für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \underbrace{\left(\tilde{A}(k) + \tilde{B}(k)\right)}_{\tilde{a}(k)} e^{\mathrm{i}kx} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{a}(k)e^{\mathrm{i}kx}\,, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(\tilde{A}(k) - \tilde{B}(k)\right) e^{\mathrm{i}kx} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{a}(k)e^{\mathrm{i}kx} \\
&= \mathrm{i}k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\tilde{a}(k)e^{\mathrm{i}kx}\,.
\end{aligned}$$

Mit $\frac{\omega}{c} = k$ ist somit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \tilde{A}(k) - \tilde{B}(k) = \tilde{a}(k) \\
\Rightarrow & \qquad \tilde{B}(k) = 0\,, \tilde{A}(k) = \tilde{a}(k) \\
\Rightarrow & \qquad u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{a}(k) e^{\mathrm{i}kx} e^{\mathrm{i}\omega t}
\end{aligned}$$

Jedoch ist $\omega = ck$, d.h. wir müssen noch die Fourier–Transformation von $\tilde{a}(k)e^{\mathrm{i}kct}$ berechnen. Zunächst

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x N e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}} e^{-ikx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x N e^{-ikx-\frac{x^2}{2\delta^2}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x N e^{-\frac{1}{2\delta^2}(x^2+2ikx\delta^2-k^2\delta^4+k^2\delta^4)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x N e^{-\frac{1}{2\delta^2}(x+\mathrm{i}k\delta^2)^2-\frac{k^2\delta^2}{2}} \\
&\overset{\text{Cauchy'scher Integralsatz}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' N e^{-\frac{1}{2\delta^2}x'^2} e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}} \\
&= \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}}
\end{aligned}$$

Damit ist nun

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{k^2\delta^2}{2}} e^{\mathrm{i}k(x+ct)} \\
&\overset{x''=x+ct}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{\delta^2}{2}(k^2-2\frac{\mathrm{i}kx''}{\delta^2}-\frac{x''^2}{\delta^2}+\frac{x''^2}{\delta^2})} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \sqrt{2\pi}\delta N e^{-\frac{\delta^2}{2}(k^2-2\frac{\mathrm{i}kx''}{\delta^2}-\frac{x''^2}{\delta^4}+\frac{x''^2}{\delta^4})} \\
&= \frac{N\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{-\frac{\delta^2}{2}(k-\frac{\mathrm{i}kx''}{\delta^2})^2} e^{-\frac{x''^2}{2\delta^2}} \\
&= \frac{N\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} e^{-\frac{x''^2}{2\delta^2}} \\
&= N e^{-\frac{(x+ct)^2}{2\delta^2}}
\end{aligned}$$

Dies entspricht einem Gauß-Paket, welches nach links läuft.

Aufgabe 31: Reflexion ebener Wellen an einer Metallwand $\boxed{\textbf{8 P}}$

Eine ebene Welle $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}$ falle auf eine ideal leitende ebene Metallwand mit Normalenvektor $\vec{n}$. Die reflektierte Welle lautet $\vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}_0' e^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}$

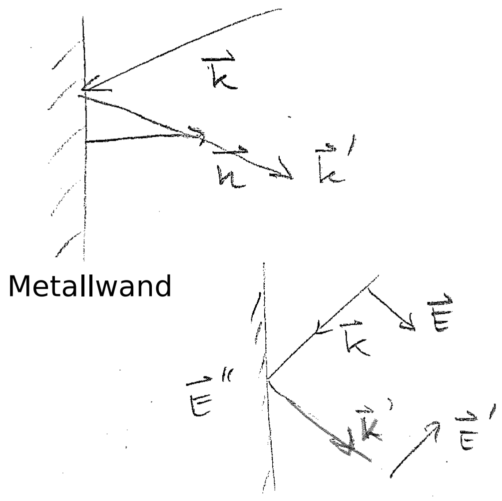
(a) Drücken Sie $\vec{k}'$ und $\vec{E}_0'$ durch $\vec{n}$, $\vec{k}$ und $\vec{E}_0$ aus.

(b) Die Welle falle senkrecht zur Metallwand ein. Berechnen Sie Energiedichte und Energiestrom der stehenden Gesamtwelle. Was ergibt sich im zeitlichen Mittel?

Hinweis: Sie können folgendes Additionstheorem nutzen:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1\,.$$

Lösung der Aufgabe 31



(a)

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}\\ \vec{E}'(\vec{r},t) &= \vec{E}'_0 e^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

An der Grenzfläche ist $\vec{E}_\parallel$ stetig. Da Metall ein perfekter Leiter ist, verschwindet dort das $\vec{E}$-Feld.

$$\Rightarrow \vec{E}''_\parallel = \vec{0} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}'_\parallel$$

Im Vakuum gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E} &= \nabla\cdot\vec{E}'\\ \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n} &= \vec{E}'\cdot\vec{n}\\ \Rightarrow \quad \vec{E}_\perp &= \vec{E}'_\perp\end{aligned}$$

Zusätzlich gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}_\parallel &= \vec{E} - \vec{E}_\perp = \vec{E} - (\vec{E}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}\\ \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}' - \vec{E}'_\perp = \vec{E}' - \vec{E}_\perp = \vec{E}' - (\vec{E}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}\\ \Rightarrow \vec{E}_\parallel + \vec{E}'_\parallel = \vec{0} &= \vec{E} + \vec{E}' - 2(\vec{E}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}\\ \Rightarrow \qquad \vec{E}' &= -\vec{E} + 2(\vec{E}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}\end{aligned}$$

Nun setzen wir die wir die Felder ein:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_0' e^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t} &= -\vec{E}_0 e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t} + 2\vec{n}(\vec{E}_0\cdot\vec{n})e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t} \\
\Rightarrow \vec{E}_0' &= \underbrace{\Big(-\vec{E}_0 + 2\vec{n}(\vec{E}_0\cdot\vec{n})\Big)\, e^{\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}}_{\text{konst.} \Rightarrow (\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r} \text{ konst.}}
\end{aligned}
$$

Da $\vec{E}_0$ unabhängig von $\vec{r}$ ist, muss $\vec{k}-\vec{k}'$ orthogonal zu $\vec{r}$ sein:

$$
\begin{aligned}
(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r} &= 0 \\
\Rightarrow \vec{k}-\vec{k}' &= C\vec{n}
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Gleichung jeweils mit $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\vec{k}\cdot(\vec{k}-\vec{k}') &= C\vec{k}\cdot\vec{n} \\
\vec{k}'\cdot(\vec{k}-\vec{k}') &= C\vec{k}'\cdot\vec{n} \\
\Rightarrow \vec{k}^2 - \vec{k}\cdot\vec{k}' + -\vec{k}'\cdot\vec{k} - \vec{k}'^2 &= 2C(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{n}
\end{aligned}
$$

Wegen der Stetigkeit in der zeitlichen Entwicklung, gilt an der Grenzfläche:

$$
\vec{k}'^2 = \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,.
$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
0 &= 2C(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{n} \\
\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{n} &= -\vec{k}'\cdot\vec{n} \\
\Rightarrow C &= \vec{n}\cdot(\vec{k}-\vec{k}') = 2(\vec{n}\cdot\vec{k}) \\
\Rightarrow \vec{k}-\vec{k}' &= 2(\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{n} \\
\Rightarrow \vec{k}' &= \vec{k} - 2(\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{n} \\
\Rightarrow \vec{E}_0' &= -\vec{E}_0 + 2(\vec{E}_0\cdot\vec{n})\vec{n}
\end{aligned}
$$

(b) Sei $\vec{n} = -\hat{z}$ und $\vec{E}_0 = E_0\hat{x}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{k} &= k\hat{z} \\
\vec{E}_0' &= -\vec{E}_0 \\
\vec{k}' &= \vec{k} - 2\vec{k} = -\vec{k}
\end{aligned}
$$

Somit ist das gesamte elektrische Feld

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{ges}} &= E_0\hat{x}e^{-\mathrm{i}\omega t}\underbrace{\left(e^{\mathrm{i}kz} - e^{-\mathrm{i}kz}\right)}_{2\mathrm{i}\sin(kz)} \\
\Rightarrow \vec{E}_{\text{phys,ges}} = \mathrm{Re}(\vec{E}_{\text{ges}}) &= E_0\hat{x}2\sin(\omega t)\sin(kz)
\end{aligned}
$$

Die Realteile der Felder stellen die physikalischen Felder dar. Das $\vec{H}$-Feld ist

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\hat{z} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0 e^{\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\hat{y} \\
\vec{H}' &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(-\hat{z} \times \vec{E}') = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0 e^{-\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t}\hat{y} \\
\Rightarrow \qquad \vec{H}_{\text{ges}} &= 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{-\mathrm{i}\omega t}E_0 \cos(kz)\hat{y} \\
\Rightarrow \vec{H}_{\text{phys,ges}} = \mathrm{Re}(\vec{H}_{\text{ges}}) &= 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t)E_0\cos(kz)\hat{y}
\end{aligned}$$

Damit ist die Energiedichte:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \vec{E}^2_{\text{phys,ges}} + \mu_0 \vec{H}^2_{\text{phys,ges}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t)\sin^2(kz) + 4\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t)\cos^2(kz)\right] \\
&= 2\varepsilon_0 E_0^2\left[\sin^2(\omega t)\sin^2(kz) + \cos^2(\omega t)\cos^2(kz)\right] \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\left[(1-\cos(2\omega t))\,(1-\cos(2kz)) + (1+\cos(2\omega t))\,(1+\cos(2kz))\right] \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\left[2 + 2\cos(2\omega t)\cos(2kz)\right] \\
&= \varepsilon_0 E_0^2\left[1 + \cos(2\omega t)\cos(2kz)\right]
\end{aligned}$$

In zeitlichen Mittel ist $\cos(2\omega t) \to 0$, damit ergibt sich:

$$\overline{W} = \varepsilon_0 E_0^2$$

Die Energiestromdichte wird vom Poynting Vektor beschrieben:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \vec{E}_{\text{phys,ges}} \times \vec{H}_{\text{phys,ges}} \\
&= 4E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(kz)\sin(kz)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\hat{z}
\end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\vec{S} = E_0^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sin(2kz)\sin(2\omega t)\hat{z}$$

Da der Poynting-Vektor zeitlich oszilliert, ergibt sich im zeitlichen Mittel:

$$\overline{\vec{S}} = \vec{0}$$