Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 11

Ausgabe: Fr, 19.01.18 – Abgabe: Fr, 26.01.18 – Besprechung: Mi, 31.01.18

Aufgabe 32: Experimenteller Nachweis der Zeitdilatation $\boxed{5\text{ P}}$

Im Jahre 1941 zeigten Hall und Rossi, dass der Zerfall von Myonen aus der kosmischen Höhenstrahlung $\mu^{\pm} \to e^{\pm}\nu_1\bar{\nu}_2$ aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit nur adäquat mit Berücksichtigung der Zeitdilatation zu beschreiben war. Im Jahr 1963 wiederholten Frisch und Smith das Experiment mit höherer Genauigkeit. Geht man davon aus, dass die Anzahl der Myonen aus der Höhenstrahlung auf der Erde gleichverteilt ist, lässt sich durch Messung in zwei verschiedenen Höhen unter Benutzung eines Geschwindigkeitsfilters eine höhenabhängige Anzahlbestimmung durchführen. Für Myonen mit Geschwindigkeit $0.995c$ ergibt sich zwischen dem ersten Messpunkt auf dem Mount Washington und dem zweiten Messpunkt in Cambrigde eine Flugzeit von 6.4 μs bei einem Höhenunterschied von 1907 m. Berechnen Sie die relative Anzahl der Myonen, die in Cambrigde zu messen sind mit und ohne Zeitdilatation bei einer mittleren Lebensdauer von $\tau = 2.20$ μs eines ruhenden Myons, d.h. $N(t)/N(0) = e^{-t/\tau}$. Welches Ergebnis ist kompatibel mit dem Messwert 0.731?

Lösung der Aufgabe 32

Eine mittlere Lebensdauer von $\tau = 2.20$ μs impliziert einen Zerfall des ruhenden Myons mit der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$N(t)/N(0) = e^{-t/\tau}$$

Bei einer Flugzeit von $t = 6.4$ μs ergibt sich $N(t)/N(0) = 0.055$, also nur ca. 5% aller Myonen auf der Höhe des Mount Washington sollte auf der Höhe von Cambrigde messbar sein. Nimmt man die Zeitdilatation hinzu, so ist

$$t' = 6.4\sqrt{1 - 0.995^2}\mu\text{s} \approx 0.639\ \mu\text{s}\,.$$

Damit folgt $N(t)/N(0) \approx 0.748$. Der experimentelle Wert bestätigt die Notwendigkeit die Zeitdilatation bei der hohen Geschwindigkeit zu berücksichtigen.

Aufgabe 33: Hintereinander ausgeführte Lorentztransformationen $\boxed{5\text{ P}}$

Untersuchen Sie den Effekt hintereinander ausgeführter Lorentztransformationen. $L_x(\eta_1)$ sei ein Boost in x–Richtung mit Rapidität η_1; $L_y(\eta_2)$ ein Boost in y–Richtung mit Rapidität η_2. Was passiert wenn Sie zunächst in x–, dann in

y–Richtung boosten und dann wieder zurück? Berechnen Sie dazu die gesamte Transformation

$$L = L_y^{-1}(\eta_2) L_x^{-1}(\eta_1) L_y(\eta_2) L_x(\eta_1) \,.$$

Es reicht aus, das Ergebnis für kleine η_1, η_2 bis zu quadratischer Ordnung anzugeben. Was für eine Transformation stellt dann die resultierende Transformation L dar?

Lösung der Aufgabe 33

$$L_x(\eta_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1) & -\sinh(\eta_1) & 0 & 0 \\ -\sinh(\eta_1) & \cosh(\eta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_2) & 0 & -\sinh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh(\eta_2) & 0 & \cosh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_x^{-1}(\eta_1) = L_x(-\eta_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1) & \sinh(\eta_1) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta_1) & \cosh(\eta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y^{-1}(\eta_2) = L_y(-\eta_2) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_2) & 0 & \sinh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\eta_2) & 0 & \cosh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y(\eta_2) L_x(\eta_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1)\cosh(\eta_2) & -\sinh(\eta_1)\cosh(\eta_2) & -\sinh(\eta_2) & 0 \\ -\sinh(\eta_1) & \cosh(\eta_1) & 0 & 0 \\ -\cosh(\eta_1)\sinh(\eta_2) & \sinh(\eta_1)\sinh(\eta_2) & \cosh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_y^{-1}(\eta_2) L_x^{-1}(\eta_1) = L_y(-\eta_2) L_x(-\eta_1) = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1)\cosh(\eta_2) & \sinh(\eta_1)\cosh(\eta_2) & \sinh(\eta_2) & 0 \\ \sinh(\eta_1) & \cosh(\eta_1) & 0 & 0 \\ \cosh(\eta_1)\sinh(\eta_2) & \sinh(\eta_1)\sinh(\eta_2) & \cosh(\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun verwenden wir die Näherung:

$$\begin{aligned} \cosh(\eta) &= \frac{1}{2}\left(e^{\eta} + e^{-\eta}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(1 + \eta + \frac{\eta^2}{2} + 1 - \eta + \frac{\eta^2}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{\eta^2}{2} \\ \sinh(\eta) &= \frac{1}{2}\left(e^{\eta} - e^{-\eta}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(1 + \eta + \frac{\eta^2}{2} - 1 + \eta - \frac{\eta^2}{2}\right) \\ &= \eta \end{aligned}$$

$$
L_y^{-1}L_x^{-1}L_yL_x \approx \begin{pmatrix} (1+\frac{\eta_1^2}{2})(1+\frac{\eta_2^2}{2}) & \eta_1(1+\frac{\eta_2^2}{2}) & \eta_2 & 0 \\ \eta_1 & 1+\frac{\eta_1^2}{2} & 0 & 0 \\ (1+\frac{\eta_1^2}{2})\eta_2 & \eta_1\eta_2 & 1+\frac{\eta_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot
$$

$$
\begin{pmatrix} (1+\frac{\eta_1^2}{2})(1+\frac{\eta_2^2}{2}) & -\eta_1(1+\frac{\eta_2^2}{2}) & -\eta_2 & 0 \\ -\eta_1 & 1+\frac{\eta_1^2}{2} & 0 & 0 \\ -(1+\frac{\eta_1^2}{2})\eta_2 & \eta_1\eta_2 & 1+\frac{\eta_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\approx \begin{pmatrix} 1+\frac{\eta_1^2}{2}+\frac{\eta_2^2}{2} & \eta_1 & \eta_2 & 0 \\ \eta_1 & 1+\frac{\eta_1^2}{2} & 0 & 0 \\ \eta_2 & \eta_1\eta_2 & 1+\frac{\eta_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{\eta_1^2}{2}+\frac{\eta_2^2}{2} & -\eta_1 & -\eta_2 & 0 \\ -\eta_1 & 1+\frac{\eta_1^2}{2} & 0 & 0 \\ -\eta_2 & \eta_1\eta_2 & 1+\frac{\eta_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\approx \begin{pmatrix} 1+\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_1^2-\eta_2^2 & -\eta_1+\eta_1 & -\eta_2+\eta_2 & 0 \\ \eta_1-\eta_1 & -\eta_1^2+1+\eta_1^2 & -\eta_1\eta_2 & 0 \\ \eta_2-\eta_2 & -\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_2 & -\eta_2^2+1+\eta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\eta_1\eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1\eta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Dies entspricht gerade einer infinitessimalen Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel $\eta_1\eta_2$:

$$
D_z(\eta_1\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\eta_1\eta_2) & -\sin(\eta_1\eta_2) & 0 \\ -\sin(\eta_1\eta_2) & \cos(\eta_1\eta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\approx \begin{pmatrix} 1 & -\eta_1\eta_2 & 0 \\ -\eta_1\eta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$