Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 12

Ausgabe: Fr, 26.01.18 – Abgabe: Fr, 02.02.18 – Besprechung: Mi, 07.02.18

Aufgabe 34: Lorentz–Transformation von $\vec{E}$- und $\vec{B}$–Feld — $\boxed{\textbf{6 P}}$

(a) Drücken Sie die Lorentz-Skalare $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ durch das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld aus. Dabei ist $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ der duale Feldstärketensor. Gibt es noch andere andere Invarianten, die in den Felstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ quadratisch sind?

(b) Kann ein elektromagnetisches Feld, das in einem Inertialsystem als rein elektrisch erscheint, in einem anderen als rein magnetisch erscheinen? Welche Kriterien müssen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen, damit es ein Inertialsystem gibt, in dem das elektrische Feld nicht mehr auftritt?

Lösung der Aufgabe 34

(a) Die Lösung erhalten wir durch die Multiplikation zweier Matrizes. Zunächst schreiben wir zwei antisymmetrische Tensoren als Matrix:

$$T = T^{\alpha\beta},\ S = S^{\mu\nu}$$

Das Ausnutzen der Antisymmetrie ergibt:

$$T^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}S_{\nu\mu} = -\mathrm{tr}\left[TS\right] .$$

Das bedeutet wir benötigen nur die Diagonalelemente des Produktes TS. Antisymmetrische Matrizen können allgemein als

$$T = T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -G_x & -G_y & -G_z \\ G_x & 0 & -H_z & -H_y \\ G_y & H_z & 0 & -H_x \\ G_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \left(\vec{G}, \vec{H}\right)$$

$$S = S_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & A_x & A_y & A_z \\ -A_x & 0 & -C_z & -C_y \\ -A_y & C_z & 0 & -C_x \\ -A_z & -C_y & C_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^{\nu\mu} = \left(\vec{A}, \vec{C}\right)$$

schreiben. Damit erhalten wir für das Produkt (nur die Diagonalelemente):

$$TS = \begin{pmatrix} \vec{G}\cdot\vec{A} & ? & ? & ? \\ ? & G_xA_x - H_zC_z - H_yC_y & ? & ? \\ ? & ? & G_yA_y - H_zC_z - H_xC_x & ? \\ ? & ? & ? & G_zA_z - H_yC_y - H_x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow -\mathrm{tr}\,[TS] = -2\vec{G}\cdot\vec{A} + 2\vec{H}\cdot\vec{C} = T^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}$

Damit erhält man direkt die gewünschten Lorentzskalare:

$$T = S = F = \left(\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right): \qquad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

$$T = \tilde{F} = \left(\vec{B}, -\frac{\vec{E}}{c}\right); S = F = \left(\frac{\vec{E}}{c}, \vec{B}\right): \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}/c$$

$$T = S = \tilde{F} = \left(\vec{B}, -\frac{\vec{E}}{c}\right): \qquad \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = 2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right)$$

$F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ sind die einzigen zwei Tensoren, welche linear in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind, d.h. es gibt keine anderen quadratischen Invarianten.

(b) Die Antwort is nein, da die Invariante

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

negativ werden würde für ein Bezugssystem in dem $F^{\mu\nu}$ nur aus einem elektrischen Feld besteht ($\vec{B} = \vec{0}$), jedoch positiv ist in dem Bezugssystem, in dem es nur aus einem magnetischen Feld besteht ($\vec{E} = \vec{0}$). Dies ist nur für die Triviallösung möglich: $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$ in allen Bezugssystemen.
Um ein Bezugssystem K' ohne elekrisches Feld, $\vec{E}' = 0$ zu bestimmen, muss folgende Relation gelten:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}/c = 0$$

für alle Bezugssysteme gelten und

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right) > 0$$

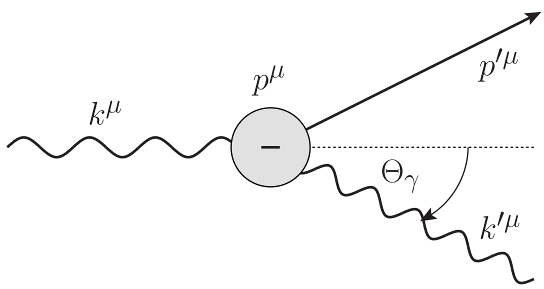
Das Skalarprodukt $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ impliziert $\vec{E} = \vec{v}\times\vec{B}$, wobei der Vektor v die zweite transversale Richtung definiert, d.h. wir können $\vec{v}$ so wählen, dass $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{v}$ paarweise orthogonal sind:

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 = \vec{v}\cdot\vec{B} = \vec{E}\cdot\vec{v}$$

Die zweite Bedingung schränkt die Größe von $\vec{E}$ (oder $\vec{v}$) ein:

$$
\begin{aligned}
0 < \vec{B}^2 c^2 - \vec{E}^2 &= \vec{B}^2 c^2 - \underbrace{\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)^2}_{\vec{v}^2 \vec{B}^2 - (\vec{v}\cdot\vec{B})^2} \\
&= \vec{B}^2 (c^2 - \vec{v}^2) \\
\Leftrightarrow |\vec{v}| &< c
\end{aligned}
$$

Aufgabe 35: Kinematik für Compton-Streuung $\boxed{\textbf{6 P}}$



Ein Photon mit Vierer-Impuls k streut an einem ruhenden Elektron mit Vierer-Impuls p und überträgt dabei Energie und Impuls auf das Elektron.

(a) Definieren Sie zunächst die Vierer-Impulse des Photons und Elektrons vor und nach dem Stoßprozess mit Polarkoordinaten. Welche Beziehung besteht zwischen Energie und Impuls?
Hinweise: Nehmen Sie an, dass der Prozess in der x-z-Ebene stattfindet und das einlaufende Photon sich in z-Richtung bewegt.

(b) Leiten Sie den Ausdruck

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}\,(1 - \cos\Theta_\gamma)\right)^{-1}$$

für die Energie E'_γ des Photons nach der Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels Θ_γ her. Lösen Sie dafür die aus der Energie-Impuls-Erhaltung resultierenden Gleichungen und eliminieren Sie den Energie-Impuls Vektor p'^{μ}_e des Elektrons nach dem Stoß.
Hinweise: Die Ruhemasse des Photons ist $m_\gamma = 0$ und die Ruhemasse des Elektrons m_e.

Lösung der Aufgabe 35

(a) Die Vierervektoren sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
k^\mu = p_\gamma^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma}{c} \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \\
k'^\mu = p'^\mu_\gamma &= \begin{pmatrix} \frac{E'_\gamma}{c} \\ \vec{p}'_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E'_\gamma}{c} \\ k' \cos(\Theta_\gamma) \\ 0 \\ -k' \sin(\Theta_\gamma) \end{pmatrix} \\
p^\mu = p_e^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{E_e}{c} \\ \vec{p}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_e}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \\
p'^\mu = p'^\mu_e &= \begin{pmatrix} \frac{E'_e}{c} \\ \vec{p}'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E'_e}{c} \\ p' \cos(\Theta_e) \\ 0 \\ -p' \sin(\Theta_e) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

(Zusatz)
Eine weitere Vereinfachung kann aus dem Boost β eines ruhenden Teilchens erhalten:

$$
\begin{aligned}
p^\mu &= \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
p'^\mu &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ -\gamma\beta mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da die erste Komponente E/c ist, gilt für die Energie:

$$E = \gamma mc^2 \,.$$

Daraus folgt, dass man jeden Viererimpuls mit der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ definieren kann als

$$p^\mu = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

(b) Nach Energie-Impulserhaltung gilt

$$
\begin{aligned}
p_\gamma^\mu + p_e^\mu &= p'^\mu_\gamma + p'^\mu_e \\
p'^\mu_e &= p_e^\mu + p_\gamma^\mu - p'^\mu_\gamma
\end{aligned}
$$

Quadrieren der Gleichung führt zu dem Ergebnis:

$$p_e'^2 = p_\gamma{}^2 + p_\gamma'^2 + p_e{}^2 + 2\left(p_\gamma - p_\gamma'\right) p_e - 2p_\gamma \cdot p_\gamma'$$

Hier können nun die Skalarprodukte gebildet werden

$$\begin{aligned}
p_\gamma^2 &= p'^2_\gamma = 0 \\
p_e^2 &= p'^2_e = m_e^2 c^2 \\
\left(p_\gamma - p_\gamma'\right) \cdot p_e &= \frac{1}{c^2}\left(E_\gamma - E_\gamma'\right) E_e \\
&= \left(E_\gamma - E_\gamma'\right) m_e \\
p_\gamma \cdot p_\gamma' &= \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma' \\
&= \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - |\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma'| \cos\Theta_\gamma \\
&= \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} \cos\Theta_\gamma
\end{aligned}$$

Setzt man diese in die obige Gleichung ein ergibt sich

$$\begin{aligned}
m_e c^2 &= m_e c^2 + 2\left(E_\gamma - E_\gamma'\right) m_e - 2\frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2}\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right) \\
0 &= 2\left(E_\gamma - E_\gamma'\right) m_e c^2 - 2E_\gamma E_\gamma'\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right) \\
E_\gamma m_e c^2 &= E_\gamma'\left(m_e c^2 + E_\gamma\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right)\right) \\
E_\gamma' &= \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 36: Zwillingsparadoxon **8 P**

Auf der Südhalbkugel der Erde lebt ein Zwillingspaar. Einer der Zwillinge fliege mit einer Rakete zu einem entfernten Planeten, kehre um und fliege wieder zur Erde zurück, während der andere Zwilling seelenruhig die Zeit am Strand von Fidschi absitzt. Zur näheren Untersuchung des Paradoxons sei der Raketenflug in sechs Phasen unterteilt, genauer Phase 1, der Beschleunigung mit konstanter Beschleunigung a im System S' des Raketenzwillings von der Erde weg über eine Dauer T_a, Phase 2, der Flug mit konstanter Geschwindigkeit V über eine Dauer T_c, Phase 3, dem Landeanflug mit Beschleunigung $-a$ im System S' über eine Dauer T_a. Die Phasen $4-6$ decken äquivalent den Rückflug ab. Alle angegebenen Zeiten seien von der wasserdichten Uhr des sonnengebräunten Erdzwillings im System S abgelesen, welcher beim Abflug seine Uhr mit der des Raketenzwillings im System S' abgeglichen hat.

(a) Berechnen Sie für die einzelnen Phasen die Zeitdilatation

$$\Delta t' = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} \mathrm{d}t \quad .$$

Hinweis:
Verwenden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ aus Sicht des Systems S während Phase 1:

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2/c^2}}$$

Nutzen Sie den arcsinh für das Resultat der ersten Phase 1. Die Phasen $3 - 6$ folgen aus Symmetrieüberlegungen der Phasen 1 und 2.

(b) Setzen Sie die Gesamtzeit $\Delta t'$ zusammen und zeigen Sie, dass $\Delta t' \leq \Delta t = 4T_a + 2T_c$ gilt. Betrachten Sie den Grenzwert $V \ll c$ und $V = 0.9c$.
Hinweis:
Zeigen und nutzen Sie die nachfolgende Beziehung:

$$T_a = \frac{V}{a\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(c) Das vermeintliche Paradoxon besteht nun in folgender Aussage: Der Raketenzwilling kann behaupten, dass der sonnengebräunte und entspannte Erdzwilling eigentlich jünger sein müsste als er selbst, da das Raketensystem S' in Ruhe war und sich die Erde entfernt und wieder genähert hat. Wo liegt der Denkfehler, der das Paradoxon auflöst? Betrachten Sie hierzu auch den Limes $T_a \to 0$.

Lösung der Aufgabe 36

(a) Anmerkung: Die Geschwindigkeit $v(t)$ erhält man durch die passende Lorentztransformation wie folgt:
Zuerst benötigen wir die Transformation der Beschleunigung. Ausgehend von der Vorlesung ist:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2} \quad \to \quad v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \quad \to \quad \frac{dv'_x}{dV} = -\frac{1 - (v_x/c)^2}{(1 - Vv_x/c^2)^2} = -\frac{1}{\gamma^2}\gamma^4 = -\gamma^2$$

Beim vorletzten Schritt wurde für die gleichförmige Bewegung $V = v_x$ gesetzt, denn v_x entspricht gerade dem Unterschied zwischen den Bezugssystemen.
Nun folgt mit $dt' = dt/\gamma$:

$$a = \left|\frac{dv'_x}{dt'}\right| = \gamma\gamma^2\frac{dv_x}{dt} = \gamma^3\dot{v}$$

Dabei soll die Beschleunigung im Raumschiff konstant gleich a sein. Somit ist:

$$a = \frac{\dot{v}}{\left(1 - (v/c)^2\right)^{3/2}}$$

Dies lässt sich über die Zeit integrieren und liefert (bei verschwindender Ausgangsgeschwindigkeit):

$$at = \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \qquad \to \qquad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}}$$

Für Phase 1 bleibt folgendes Integral zu berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta t_1' &= \int_0^{T_a} \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}dt = \int_0^{T_a} \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{(at)^2}{1+(at/c)^2}\right)}dt \\ &= \int_0^{T_a} \sqrt{1-\frac{(at)^2}{c^2+(at)^2}}dt = \int_0^{T_a} \sqrt{\frac{c^2}{c^2+(at)^2}}dt \\ &= \int_0^{T_a} \sqrt{\frac{1}{1+(at/c)^2}} = \int_0^{aT_a/c} \frac{c}{a}\sqrt{\frac{1}{1+u^2}}du \\ &= \frac{c}{a}[\operatorname{arcsinh}(x)]_0^{aT_a/c} = \frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{aT_a}{c}\right)\end{aligned}$$

Die maximale Geschwindigkeit ist

$$V = \frac{aT_a}{\sqrt{1+(aT_a/c)^2}} \quad . \tag{1}$$

Damit folgt unmittelbar für Phase 2:

$$\Delta t_2' = \int_0^{T_c} \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}dt = T_c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Die Phasen 3, 4 und 6 entsprechen Phase 1, offenbar bringt die Ersetzung $a \to -a$ keinen Unterschied bei der Integration und die Dauer der Phasen sind identisch. Analog ist Phase 5 identische zu Phase 2.

(b) Die Gesamtzeit ergibt sich nun zu:

$$\Delta t' = 4\frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{aT_a}{c}\right) + 2T_c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Die zu zeigende Beziehung folgt aus Gleichung 1 durch Auflösen nach T_a. Mit beiden Gleichungen kann man entweder V oder T_a in $\Delta t'$ eliminieren und erhält:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= 4\frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{V}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}\right) + 2T_c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \\ \Delta t' &= 4\frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{aT_a}{c}\right) + 2T_c\frac{1}{\sqrt{1+(aT_a/c)^2}}\end{aligned}$$

Zuerst einmal ist $\Delta t' \leq \Delta t$ wegen $\operatorname{arcsinh}(x) \leq x$. Mit $\lim_{x\to 0}\operatorname{arcsinh}(x) = x$ folgt im Limes $V \ll c$:

$$\Delta t' \approx 4\frac{V}{a\sqrt{1-V^2/c^2}} + 2T_c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 4T_a + 2T_c$$

Für eine sehr hohe Geschwindigkeit $V = 0.9c$ folgt $T_a = 2.294V/a$ und damit:

$$\Delta t = 2T_c + 8.259\frac{c}{a} \qquad \Delta t' = 2T_c\sqrt{1-0.9^2} + 4\frac{c}{a}\operatorname{arcsinh}(2.065) = 0.872T_c + 5.889\frac{c}{a}$$

Auf der Uhr des Raketenzwilling ist demnach deutlich weniger Zeit vergangen.

(c) Offenbar erfährt der Raketenzwilling eine Beschleunigung und ist damit nicht in einem Inertialsystem! Tatsächlich verschwindet der Zeitunterschied, wenn die Beschleunigungsphase klein ist $T_a \to 0$, denn

$$\Delta t' = 4\frac{c}{a}\mathrm{arcsinh}\left(\frac{aT_a}{c}\right) + 2T_c\frac{1}{\sqrt{1+(aT_a/c)^2}} \approx 2T_c \approx \Delta t \quad .$$