

Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 2

Ausgabe: Fr, 03.11.17 – Abgabe: Fr, 10.11.17 – Besprechung: Mi, 15.11.17

Aufgabe 5: Scheibe in der Ebene

8 P

Untersuchen Sie ein Randwertproblem im Halbraum $z > 0$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei $z = 0$ (also auf der x - y Ebene) und $z \rightarrow \infty$.

- (a) Geben Sie die Green'sche Funktion $G_D(\vec{x}, \vec{x}')$ an.
- (b) Das Potential sei nun auf der x - y -Ebene vorgegeben. Innerhalb des Kreises mit Radius a um den Ursprung sei $\Phi = V$ und ausserhalb $\Phi = 0$. Zeigen Sie, dass das Potential im leeren Halbraum $z > 0$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) mit

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

als

$$\Phi(r, z) = \frac{Vz}{2\pi} \int_0^a dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi' \right]^{-3/2} \quad (1)$$

geschrieben werden kann.

- (c) Zeigen Sie, dass entlang der Kreisachse, also der positiven z -Achse, das Potential die einfach Form

$$\Phi(r = 0, z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

annimmt.

- (d) Zeigen Sie, dass das Potential (1) für große Entfernungen vom Ursprung ($R^2 = r^2 + z^2 \gg a^2$) als eine Potenzreihe in $1/R^2$ entwickelt werden kann und die führenden Terme des Potentials dann

$$\Phi = \frac{V a^2 z}{2 R^3} \left[1 - \frac{3 a^2}{4 R^2} + \frac{5 a^2}{8 R^4} (a^2 + 3r^2) + \dots \right]$$

ergeben. Verifizieren Sie, dass die Resultate aus (c) und (d) miteinander konsistent sind.

Lösung der Aufgabe 5

- (a) Herleitung ist optional:
Für die Green'sche Funktion gilt

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}').$$

Mit der Dirichlet Randbedingung

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}')|_{z=0} \stackrel{!}{=} 0, \\ G_D(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r} \rightarrow \infty} \stackrel{!}{=} 0,$$

erhält man folgende Gleichung für $F(\vec{r}, \vec{r}')$:

$$F(\vec{r}, \vec{r}')|_{z=0} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z' \end{pmatrix} \right|}$$

Der Ansatz

$$F(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ a \cdot z - z' \end{pmatrix} \right|}$$

wird nun in folgende Bedingung eingesetzt:

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta F(\vec{r}, \vec{r}') \\ = - \frac{(a^2 - 1)(x - x')^2 + (a^2 - 1)(y - y')^2 + (2 - 2a^2)(az - z')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (az - z')^2]^{\frac{5}{2}}} \\ \Rightarrow a = \pm 1$$

Im Fall $a = +1$ wird die Green'schen Funktion komplett verschwinden, dies ist die triviale (unphysikalische) Lösung. Die wir nicht weiter betrachten. Damit lautet die gesuchte Green'sche Funktion ($a = -1$):

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}.$$

- (b) Das Potential kann mit Hilfe der Green'schen Funktion bestimmt werden

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'}$$

Da die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = 0$, muss nur der zweite Term berücksichtigt werden. Der Vektor $\vec{n} = (0, 0, -1)$ für das Potential in der Halbebene $z > 0$ steht senkrecht auf der $x - y$ -Ebene, damit gilt

$$\vec{n} \cdot \nabla' = -\frac{\partial}{\partial z}$$

und somit ergibt sich für den zweiten Term

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial G}{\partial n'} &= ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{-3/2} \frac{-1}{2} \cdot 2(z-z')(-1) \\
 &\quad - ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2)^{-3/2} \frac{-1}{2} \cdot 2(z+z')(1), \\
 \frac{\partial G}{\partial n'} \Big|_{z'=0} &= -2z [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{-3/2}
 \end{aligned}$$

Den Nenner wird in Zylinderkoordinaten umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 (x-x')^2 + (y-y')^2 &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy' \\
 &= r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\varphi)\cos(\varphi') + \sin(\varphi)\sin(\varphi')) \\
 &= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi')
 \end{aligned}$$

In der $z = 0$ -Ebene ist das Potential durch die eine Scheibe mit Radius a gegeben

$$\Phi(x, y, 0) = \begin{cases} V & \text{für } x^2 + y^2 \leq a \\ 0 & \text{für } x^2 + y^2 > a \end{cases}$$

Damit kann nun das Potential bestimmt werden:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S dA' \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' V 2z [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi') + z^2]^{-3/2}$$

Da Φ azimuthal-symmetrisch ist, hängt nicht von φ ab:

$$\Rightarrow \Phi(r, z) = \frac{Vz}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' [r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi') + z^2]^{-3/2}$$

(c) Auf der Kreisachse gilt $r = 0$, damit vereinfacht sich das Potential zu

$$\begin{aligned}
 \Phi(r=0, z) &= \frac{Vz}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr' r' [r'^2 + z^2]^{-3/2} \\
 &\stackrel{dr'r' \rightarrow dr'^2/2}{=} Vz \int_0^{a^2} dr'^2 \frac{1}{2} [r'^2 + z^2]^{-3/2} \\
 &= \frac{Vz}{2} (-2) [r'^2 + z^2]^{-1/2} \Big|_{r'^2=0}^{a^2} = -Vz \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right) \\
 &= V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)
 \end{aligned}$$

(d)

$$\Phi(r, z) = \frac{Vz}{2\pi} \int_0^a dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' [z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi']^{-3/2}$$

Für große $R^2 = z^2 + r^2$ kann der Nenner umgeschrieben werden:

$$\left[R^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi' \right]^{-3/2} = R^{-3} \left[1 + \frac{1}{R^2} \underbrace{(r'^2 - 2rr' \cos \varphi')}_\alpha \right]^{-3/2}$$

Die Taylor-Entwicklung für großen Distanzen R ist analog zur Taylor-Entwicklung von $(1 + \epsilon \alpha_i)^{-1/2}$ für kleine $\epsilon = 1/R^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (1 + \epsilon \alpha)^{-3/2} &= -\frac{3\alpha}{2} (1 + \epsilon \alpha)^{-5/2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} (1 + \epsilon \alpha)^{-3/2} &= \frac{15}{4} \alpha^2 (1 + \epsilon \alpha)^{-7/2} \\ \Rightarrow (1 + \epsilon \alpha)^{-3/2} &= 1 - \frac{3\alpha}{2} \epsilon + \frac{15}{8} \alpha^2 \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ \Rightarrow \left[1 + \frac{1}{R^2} \underbrace{(r'^2 - 2rr' \cos \varphi')}_\alpha \right]^{-3/2} &\approx 1 - \frac{3}{2} (r'^2 - 2rr' \cos \varphi') \frac{1}{R^2} \\ &\quad + \frac{15}{8} (r'^2 - 2rr' \cos \varphi')^2 \frac{1}{R^4} \end{aligned}$$

Die Integration über φ ergibt:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^n(\varphi) = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n = 1 \\ \pi & \text{für } n = 2 \\ \dots & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &\approx \frac{Vz}{2\pi R^3} \int_0^a dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[1 - \frac{3}{2} (r'^2 - 2rr' \cos \varphi') \frac{1}{R^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} (r'^4 - 4rr'^3 \cos \varphi' + 4r^2 r'^2 \cos^2 \varphi') \frac{1}{R^4} \right] \\ &\stackrel{dr' r' \rightarrow dr'^2/2}{=} \frac{Vz}{4\pi R^3} \int_0^{a^2} dr'^2 \left[2\pi - 3\pi \frac{r'^2}{R^2} + \frac{15\pi}{4} (r'^4 + 2r^2 r'^2) \frac{1}{R^4} \right] \\ &= \frac{Vz}{4R^3} \left[2a^2 - \frac{3}{2} \frac{a^4}{R^2} + \frac{5}{4} (a^6 + 3r^2 a^4) \frac{1}{R^4} \right] \\ &= \frac{Va^2 z}{2R^3} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{R^2} + \frac{5a^2}{8} (a^2 + 3r^2) \frac{1}{R^4} \right] \end{aligned}$$

Im Fall $r = 0 \Rightarrow R^2 = z^2$:

$$\Phi(r, z) \approx \frac{Va^2}{2z^2} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{z^2} + \frac{5}{8} \frac{a^4}{z^4} \right] \quad (2)$$

Auf der anderen Seite

$$\begin{aligned} \Phi(r = 0, z) &= V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = V \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} \right) \\ &= V \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} \right), \end{aligned}$$

mit $\epsilon = a^2 z^{-2}$, können wir den Term $(1 + \epsilon)^{-1/2}$ um $\epsilon = 0$ entwickeln:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \epsilon}(1 + \epsilon)^{-1/2} &= -\frac{1}{2}(1 + \epsilon)^{-3/2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2}(1 + \epsilon)^{-1/2} &= \frac{3}{4}(1 + \epsilon)^{-5/2} \\ \frac{\partial^3}{\partial \epsilon^3}(1 + \epsilon)^{-1/2} &= -\frac{15}{8}(1 + \epsilon)^{-7/2}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi(r=0, z) &\approx V \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 \right) \right) \\ &= V \left(\frac{1}{2}\epsilon - \frac{3}{8}\epsilon^2 + \frac{5}{16}\epsilon^3 \right) = \frac{Va^2}{2z^2} \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a^2}{z^2} + \frac{5}{4}\frac{a^4}{z^4} \right).\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (2) überein.

Aufgabe 6: Randterm der geerdeten Kugel

6 P

Die Dirichlet'sche Green'sche Funktion einer geerdeten, leitenden Kugel mit Radius a lautet mit $x' = |\vec{x}'|$

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{a/x'}{|\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}'|}.$$

- (a) Berechnen Sie den dazugehörigen Randterm

$$\left. \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right|_{x'=a} = \frac{a^2 - x^2}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}},$$

wobei $\gamma = \angle(\vec{x}, \vec{x}')$.

- (b) Bestimmen Sie die Oberflächenladungsdichte, die von einer Punktladung q bei $\vec{x}'$ ($x' > a$) auf der geerdeten Kugel induziert wird. Zeigen Sie, dass die gesamte, auf der Oberfläche induzierte Ladung genau der Spiegelladung entspricht.

Es befinde sich nun eine Punktladung im Inneren der Kugel. Diskutieren Sie kurz das Potential im Inneren der Kugel, sowie die induzierte Oberflächenladungsdichte

Lösung der Aufgabe 6

- (a) Da es sich um ein kugelsymmetrisches Problem handelt, zeigt der Normalvektor nur in radial Richtung zum Kugelmittelpunkt:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= -\hat{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n'} &= -\frac{\partial}{\partial r'}\end{aligned}$$

In diesem Fall ist $r' = x'$. Die Green'sche Funktion können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}') &= \left(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{x'} \left(x^2 + \frac{a^4}{x'^4} x'^2 - 2 \frac{xa^2}{x'} \cos(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos(\gamma) \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} G(\vec{x}, \vec{x}') &= - \frac{2x' - 2x \cos(\gamma)}{2} \left(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos(\gamma) \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{\frac{2x^2 x'}{a^2} - 2x \cos(\gamma)}{2} \left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos(\gamma) \right)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} \right|_{x'=a} &= - \left. \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial x'} \right|_{x'=a} \\ &= (a - x \cos(\gamma)) \left(x^2 + a^2 - 2xa \cos(\gamma) \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left(\frac{x^2}{a} - x \cos(\gamma) \right) \left(x^2 + a^2 - 2xa \cos(\gamma) \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a^2 - x^2}{a \left(x^2 + a^2 - 2xa \cos(\gamma) \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(b) Für induzierte Oberflächenladungsdichte σ gilt

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{x=a} = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} G(\vec{x}, \vec{x}_0) \Big|_{x=a}$$

Wegen $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = G(\vec{x}_0, \vec{x})$, ist die Rechnung aus a) bekannt

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{q}{4\pi} \frac{a^2 - x_0^2}{a \left(x_0^2 + a^2 - 2x_0a \cos(\gamma) \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}{\left(\frac{x_0^2}{a^2} + 1 - 2 \frac{x_0}{a} \cos(\gamma) \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 - \xi^2}{(\xi^2 + 1 - 2\xi \cos(\gamma))^{\frac{3}{2}}} \quad \text{mit } \xi = \frac{x_0}{a} \end{aligned}$$

Um die gesamte Oberflächenladung zu ermitteln, nutzen wir

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \vec{n}_x \cdot \vec{n}_{x'} \\ \text{o.B.d.A.} \quad \vec{r} &= r \hat{z} \\ \Rightarrow \Theta' &= 0 \quad \Rightarrow \gamma = \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \oint_A \sigma dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos(\Theta) a^2 \sigma \\
&= \frac{q}{2} \int_{-1}^1 d\cos(\Theta) \frac{1 - \xi^2}{(\xi^2 + 1 - 2\xi \cos(\gamma))^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{q}{2\xi} \left[\frac{1 - \xi^2}{(\xi^2 + 1 - 2\xi \cos(\gamma))^{\frac{1}{2}}} \right]_{\cos(\Theta)=-1}^1 \\
&= \frac{q(1 - \xi^2)}{2\xi} \left[\frac{1}{\sqrt{(\xi - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi + 1)^2}} \right] = \frac{q(1 - \xi^2)}{2\xi} \frac{\xi + 1 - (\xi - 1)}{(\xi^2 - 1)} \\
&= -\frac{q}{\xi} = -\frac{a}{x_0} q
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Spiegelladung (siehe Jackson Gl (2.4) oder Vorlesung). Mit einer Ladung Q im Inneren der Kugel ist die Bildladung wegen der Symmetrie aussen. Analog zu obigen Szenario sind die Beträge der Ladung im Inneren der Kugel und die gesamte Oberflächenladung gleich. Jedoch ist nun das Vorzeichen umgedreht. Das bedeutet, dass die induzierte Oberflächenladung $-Q$ ist.

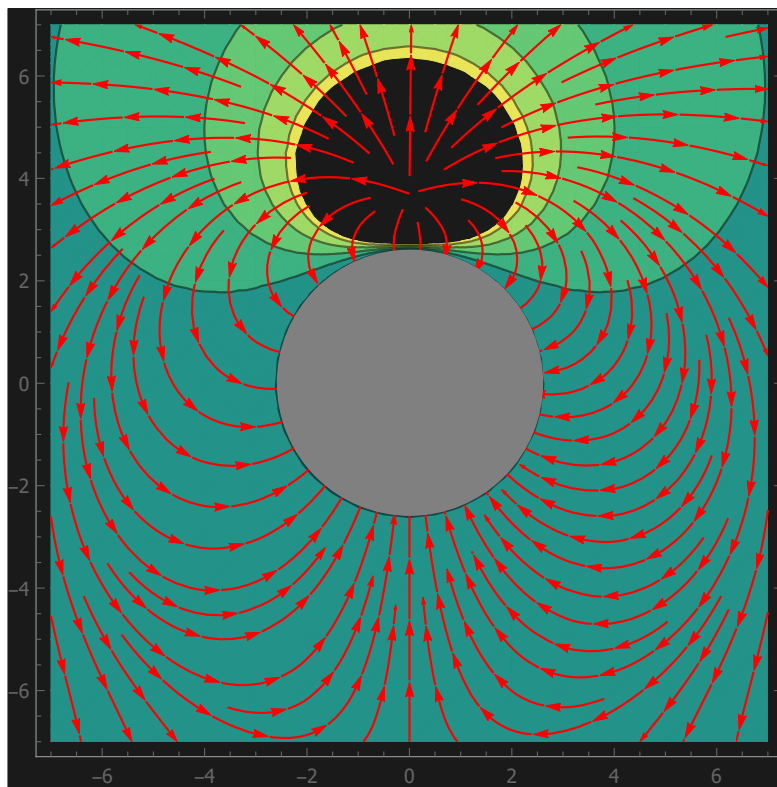


Abbildung 1: Feldlinien (rot) und Äquipotentiallinien (schwarz) der geerdeten Kugel (grau). Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 7: 90°-Ecke

6 P

Zwei geerdete Halbebenen schließen einen 90° Winkel miteinander ein. Eine Halbebene sei die x-z-Ebene mit $x > 0$. Die andere sei die entsprechende, um 90° um die z-Achse gedrehte Halbebene. Die Ebenen treffen sich also in der z-Achse.

- Bestimmen Sie das Potential einer Punktladung innerhalb dieses Winkels mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen.
- Untersuchen Sie das Potential für große Entfernungen r von der Probeladung. Geben Sie den im allgemeinen führenden Term explizit an.

Lösung der Aufgabe 7

- Wir benutzen die Methoden der Spiegelladungen um das Potential zweier Punktladungen in der Nähe zweier Halbebenen mit einem Winkel von 90° zu simulieren. Hierbei werden Zylinderkoordinaten ($\vec{r} = (r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), z)$) für das in z-Symmetrische Potential verwendet:

$$\Phi = \Phi(r, 0 < \varphi < 90^\circ).$$

Der Abstand r und die z Koordinate wird durch die Punktladung vorgegeben. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung wird $z = 0$ gesetzt. Die Spiegelladungen unterscheiden sich somit nur durch die unterschiedlichen Winkel φ :

#	Ladung	Koordinaten		
		r	φ	z
0	$+q$	r_0	φ_0	0
1	$-q$	r_0	$\varphi_1 = -\varphi_0$	0
2	$+q$	r_0	$\varphi_2 = \pi + \varphi_0$	0
3	$-q$	r_0	$\varphi_3 = \pi - \varphi_0$	0

Das Potential am Ort $\vec{r}'$ einer freien Punktladung mit Ladung q am Ort $\vec{r}' = (r_0 \cos(\varphi_i), y = r_0 \sin(\varphi_i), 0)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \Phi_{el, \varphi_i}(\vec{r}') &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \\
 &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}} \\
 &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i) + z^2}} \\
 &\stackrel{R_0^2 = r_0^2 + z^2}{=} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} (R_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i))}} \\
 &\stackrel{\alpha_i = R_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i)}{=} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_i}{r^2}}}.
 \end{aligned}$$

Somit lautet das gesuchte Potential:

$$\Phi(\vec{r}') = \sum_{i=0}^3 \Phi_{el, \varphi_i}(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=0}^3 \frac{(-1)^i}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_i}{r^2}}}.$$

- (b) Die Entwicklung für großen Distanzen r wird zunächst für $\Phi_{el,\varphi_i}(\vec{r})$ durchgeführt. Dafür entwickeln wir (wie in Aufgabe 6) den Faktor $(1 + \epsilon\alpha_i)^{-1/2}$ für kleine $\epsilon = 1/r^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \epsilon}(1 + \epsilon\alpha_i)^{-1/2} &= -\frac{\alpha_i}{2}(1 + \epsilon\alpha_i)^{-3/2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2}(1 + \epsilon\alpha_i)^{-1/2} &= \frac{3}{4}\alpha_i^2(1 + \epsilon\alpha_i)^{-5/2} \\ \frac{\partial^3}{\partial \epsilon^3}(1 + \epsilon\alpha_i)^{-1/2} &= -\frac{15}{8}\alpha_i^3(1 + \epsilon\alpha_i)^{-7/2} \\ \Rightarrow \Phi_{el,\varphi_i}(\vec{r}) &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_i}{r^2} + \frac{3}{8} \frac{\alpha_i^2}{r^4} - \frac{5}{16} \frac{\alpha_i^3}{r^6} + \dots \right] \\ &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(R_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i))}{r^2} + \frac{3}{8} \frac{(R_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i))^2}{r^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{16} \frac{(R_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_i))^3}{r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \right] \\ &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{r_0 \cos(\varphi - \varphi_i)}{r} + \frac{1}{2} \frac{3r_0^2 \cos^2(\varphi - \varphi_i) - R_0^2}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(5r_0^2 \cos^2(\varphi - \varphi_i) - 3R_0^2)r_0 \cos(\varphi - \varphi_i)}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}) \right]\end{aligned}$$

Nun berechnen wir zunächst das Potential von Ladung 0 und 1. Durch die entgegengesetzte Ladung verschwinden Terme, welche unabhängig von φ sind:

$$\begin{aligned}\Phi_{el,\varphi_0+\varphi_1}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[(\cos(\varphi - \varphi_0) - \cos(\varphi + \varphi_0)) \frac{r_0}{r} \right. \\ &\quad \left. + (\cos^2(\varphi - \varphi_0) - \cos^2(\varphi + \varphi_0)) \frac{3r_0^2}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right]\end{aligned}$$

Mit den Relationen

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

lassen sich die trigonometrischen Terme vereinfachen.

$$\begin{aligned}\cos(\varphi - \varphi_0) - \cos(\varphi + \varphi_0) &= \cos(\varphi)\cos(-\varphi_0) - \sin(\varphi)\sin(-\varphi_0) \\ &\quad - (\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) - \sin(\varphi)\sin(\varphi_0)) \\ &= 2\sin(\varphi)\sin(\varphi_0) \\ \cos^2(\varphi - \varphi_0) - \cos^2(\varphi + \varphi_0) &= [\cos(\varphi)\cos(-\varphi_0) - \sin(\varphi)\sin(-\varphi_0)]^2 \\ &\quad - [\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) - \sin(\varphi)\sin(\varphi_0)]^2 \\ &= -2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos(-\varphi_0)\sin(-\varphi_0) \\ &\quad + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\varphi_0)\sin(\varphi_0) \\ &= 4\cos(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\varphi_0)\sin(\varphi_0) \\ &= \sin(2\varphi)\sin(2\varphi_0)\end{aligned}$$

$$\Phi_{el,\varphi_0+\varphi_1}(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{2r_0}{r} \sin(\varphi) \sin(\varphi_0) + \frac{3r_0^2}{2r^2} \sin(2\varphi) \sin(2\varphi_0) + \mathcal{O}(r^{-3}) \right]$$

Unter Verwendung von $\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$ lässt sich das Potential von den Spiegelladungen 3 und 4 analog bestimmen:

$$\Phi_{el,\varphi_3+\varphi_4}(\vec{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-\frac{2r_0}{r} \sin(\varphi) \sin(\varphi_0) + \frac{3r_0^2}{2r^2} \sin(2\varphi) \sin(2\varphi_0) + \mathcal{O}(r^{-3}) \right]$$

Damit lautet dann die erste allgemein nicht verschwindende Ordnung des Potentials:

$$\Phi(\vec{r}') = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0^2}{r^3} \sin(2\varphi) \sin(2\varphi_0) + \mathcal{O}(r^{-4}).$$

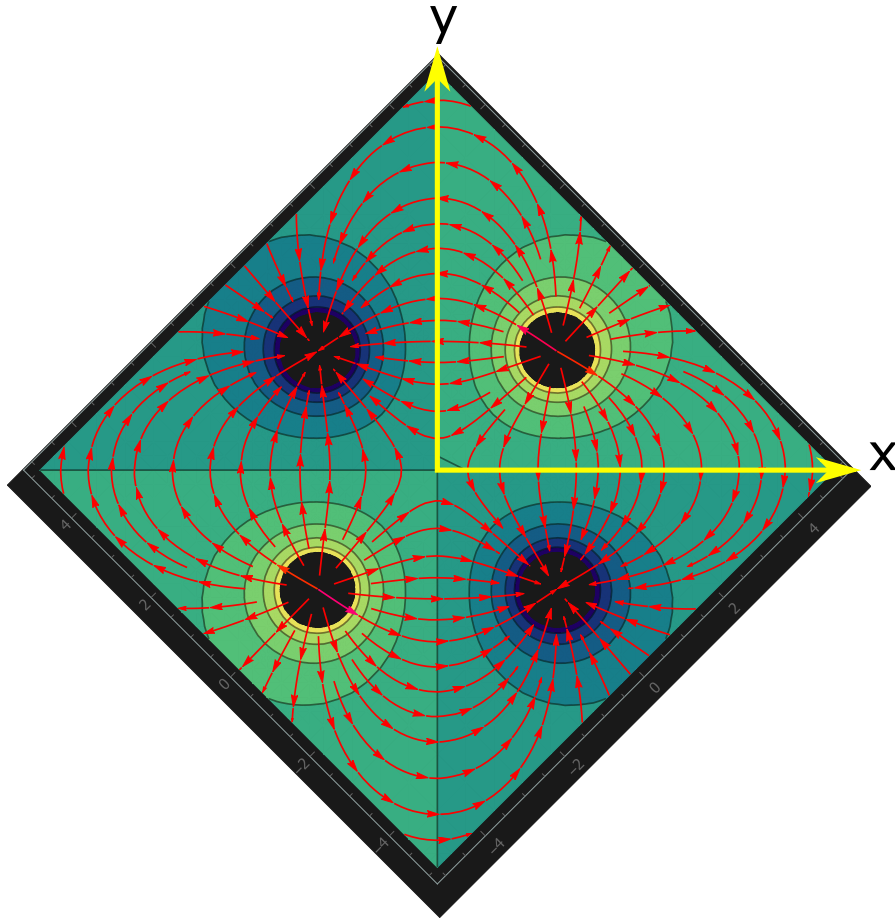


Abbildung 2: Feldlinien (rot) und Äquipotentiallinien (schwarz) der 90°-Ecke. Vielen Dank an Marcel Krause.