Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 3

Ausgabe: Fr, 10.11.17 – Abgabe: Fr, 17.11.17 – Besprechung: Mi, 22.11.17

Aufgabe 8: Prolate sphärische Koordinaten $\boxed{\textbf{5 P}}$

Prolate sphärische Koordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= a\sinh(\mu)\sin(\nu)\cos(\varphi)\,, \\ y &= a\sinh(\mu)\sin(\nu)\sin(\varphi)\,, \\ z &= a\cosh(\mu)\cos(\nu) \end{aligned}$$

mit $\mu \geq 0$, $\nu \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und konstantem $a > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren in μ, ν und φ-Richtung und überprüfen Sie, ob diese orthogonal zueinander sind.

(b) Bestimmen Sie den Nabla-Operator ∇ in Abhängigkeit der in a) bestimmten Einheitsvektoren.

Lösung der Aufgabe 8

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} &= a \begin{pmatrix} \cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\varphi) \\ \cosh(\mu)\sin(\nu)\sin(\varphi) \\ \sinh(\mu)\cos(\nu) \end{pmatrix} \\ \hat{\mu} &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} \\ &= \left[a^2(\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu))\right]^{-1/2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} \\ &= [\underbrace{(\cosh^2(\mu) - \sinh^2(\mu))}_{1}\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)]^{-1/2} \begin{pmatrix} \cosh(\mu)\sin(\nu)\cos(\varphi) \\ \cosh(\mu)\sin(\nu)\sin(\varphi) \\ \sinh(\mu)\cos(\nu) \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} &= a \begin{pmatrix} \sinh(\mu)\cos(\nu)\cos(\varphi) \\ \sinh(\mu)\cos(\nu)\sin(\varphi) \\ -\cosh(\mu)\sin(\nu) \end{pmatrix} \\
\hat{\nu} &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \\
&= \left[a^2(\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu))\right]^{-1/2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \\
&= [\sinh^2(\mu) + \underbrace{(\cosh^2(\mu) - \sinh^2(\mu))}_{1} \sin^2(\nu)]^{-1/2} \begin{pmatrix} \sinh(\mu)\cos(\nu)\cos(\varphi) \\ \sinh(\mu)\cos(\nu)\sin(\varphi) \\ -\cosh(\mu)\sin(\nu) \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= a \begin{pmatrix} -\sinh(\mu)\sin(\nu)\sin(\varphi) \\ \sinh(\mu)\sin(\nu)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\varphi} &= \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\
&= \left[a^2(\sinh^2(\mu)\sin^2(\nu))\right]^{-1/2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Prüfung der Orthogonalität :

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mu} \cdot \hat{\nu} = \cosh(\mu)\sin(\nu)\sinh(\mu)\cos(\nu) - \cosh(\mu)\sin(\nu)\sinh(\mu)\cos(\nu) = 0 \\
&\hat{\mu} \cdot \hat{\varphi} = 0 \\
&\hat{\nu} \cdot \hat{\varphi} = 0
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \sum_i \hat{q}_i \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|^{-1} \frac{\partial}{\partial q_i} \\
&= \frac{\hat{\mu}\frac{\partial}{\partial \mu} + \hat{\nu}\frac{\partial}{\partial \nu}}{a\sqrt{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}} + \frac{\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}}{a\sinh(\mu)\sin^2(\nu)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $\boxed{\textbf{5 P}}$

(a) Bestimmen Sie die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\Theta\hat{\Theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie dazu die aus der Vorlesung bekannte Darstellung

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\Theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

des Nabla-Operators in Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie daraus den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten.

Lösung der Aufgabe 9

(a)

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\Theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(A_r\hat{r} + A_\Theta\hat{\Theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\right)$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= (\cos(\varphi)\sin(\Theta),\, \sin(\varphi)\sin(\Theta),\, \cos(\Theta)) \\
\hat{\Theta} &= (\cos(\varphi)\cos(\Theta),\, \sin(\varphi)\cos(\Theta),\, -\sin(\Theta)) \\
\hat{\varphi} &= (-\sin(\varphi),\, \cos(\varphi),\, 0)\ .
\end{aligned}$$

Die Ableitungen der Einheitsvektoren sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{r}}{\partial r} = 0, && \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial r} = 0, && \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} = 0, \\
&\frac{\partial \hat{r}}{\partial \Theta} = \hat{\Theta}, && \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \Theta} = -\hat{r}, && \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \Theta} = 0, \\
&\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \sin(\Theta)\hat{\varphi}, && \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \varphi} = \cos(\Theta)\hat{\varphi}, && \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\left(\cos(\varphi),\, \sin(\varphi),\, 0\right) \\
& && && \qquad = -\sin(\Theta)\hat{r} - \cos(\Theta)\hat{\Theta}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} =& \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\Theta}{\partial \Theta} + \frac{1}{r\sin(\Theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
&+ \frac{A_r}{r} + \frac{\sin(\Theta)A_r}{r\sin(\Theta)} + \frac{\cos(\Theta)A_\Theta}{r\sin(\Theta)} \\
=& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin(\Theta)}\left[\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin(\Theta)A_\Theta\right) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right]
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi = \nabla \cdot \underbrace{\nabla\Phi}_{\vec{A}} &= \nabla \cdot \left(\hat{r}\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial r}}_{A_r} + \hat{\Theta}\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}}_{A_\Theta} + \hat{\varphi}\underbrace{\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}}_{A_\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin(\Theta)}\left[\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin(\Theta)\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\Theta)}\frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\sin(\Theta)\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\Theta)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10: Dipolfeld **5 P**

Ein elektrostatischer Dipol bestehe aus einer negativen Ladung $-q$ am Ursprung und einer positiven Ladung q bei $\vec{a}$.

(a) Wie lautet das Potential $\Phi(\vec{r})$?

(b) Bestimmen Sie die Komponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten. Wählen Sie dazu die z-Achse parallel zu $\vec{a}$.

(c) Bestimmen Sie den führenden Term des Potentials für $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$

Lösung der Aufgabe 10

(a) Das Potential eines Dipols ergibt sich aus der Summer der Potentiale der Punktladungen

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q}{|\vec{r}|} + \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right]$$

(b) Dafür können wir zunächst das Potential als Funktion der Kugelkoordinaten ($\vec{r} \parallel \hat{z}$) schreiben:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(\Theta)}}\right].$$

und das E-feld mit

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \hat{r}\underbrace{\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)}_{E_r} + \hat{\Theta}\underbrace{\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}\right)}_{E_\Theta} + \hat{\varphi}\underbrace{\left(-\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)}_{E_\varphi}$$

bestimmen.

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{2r-2a\cos(\Theta)}{2}\left(r^2+a^2-2ar\cos(\Theta)\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2} + (r-a\cos(\Theta))\left(r^2+a^2-2ar\cos(\Theta)\right)^{-\frac{3}{2}}\right] \\
E_\Theta &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{2ar\sin(\Theta)}{2}\left(r^2+a^2-2ar\cos(\Theta)\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{qa\sin(\Theta)}{4\pi\varepsilon_0}\left(r^2+a^2-2ar\cos(\Theta)\right)^{-\frac{3}{2}} \\
E_\varphi &= 0
\end{aligned}$$

(c) Die Entwicklung für $|\vec{r}| \gg |\vec{a}|$ muss nur für den zweiten Term durchgeführt werden:

$$\frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|} = \frac{1}{r} + \vec{a}\cdot\nabla\frac{1}{r} + \cdots = \frac{1}{r} + \vec{a}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \ldots$$

Mit dem Dipolmoment $\vec{p} = q\vec{a}$ lautet nun das entwickelte Potential

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \,.$$

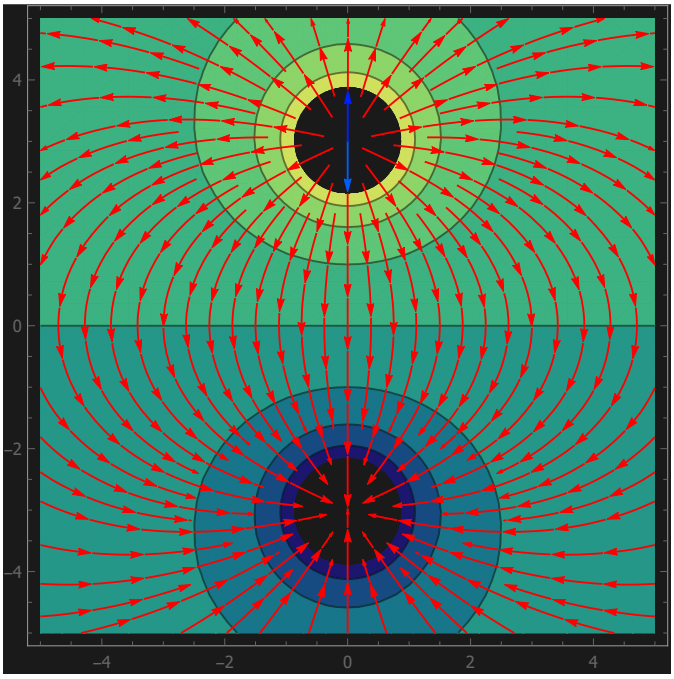

Abbildung 3: Feldlinien (rot) und Äquipotentiallinien (schwarz) eines Dipols (Nahfeld). Vielen Dank an Marcel Krause.

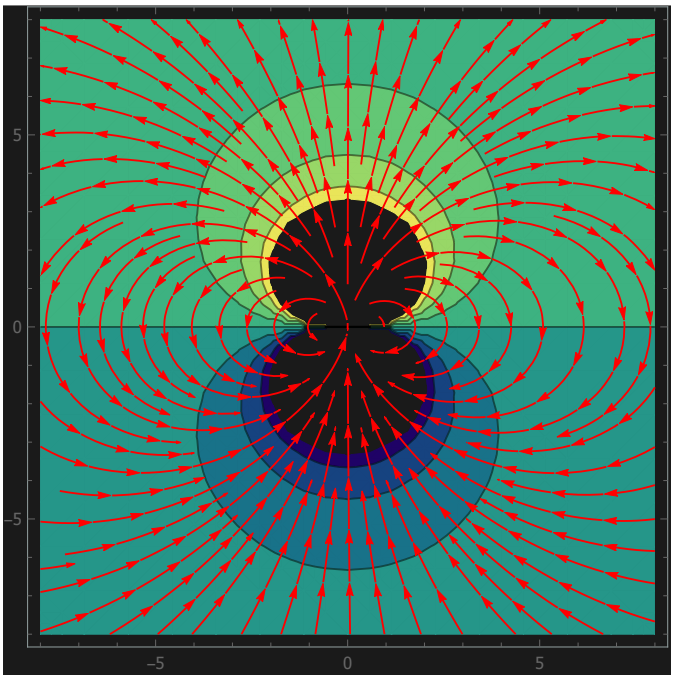

Abbildung 4: Feldlinien (rot) und Äquipotentiallinien (schwarz) eines Dipols (Fernfeld). Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 11: Legendre–Differentialgleichung **5 P**

Gegeben sind die Polynome $P_\ell(x)$, die durch die Formel von Rodrigues,

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell$$

definiert sind.

(a) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsformeln

$$\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_{\ell-1}}{\mathrm{d}x} - (2\ell+1)P_\ell = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x} - (\ell+1)P_\ell = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie mittels obiger Rekursionsformeln, dass die Polynome $P_\ell(x)$ der Legendre'schen Differentialgleichung mit $m^2 = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) = \ell(\ell+1)P_\ell$$

genügen.

Hinweis: Folgende (per Induktion beweisbare) Relation könnte nützlich sein:

$$\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(xf(x)) = \ell\frac{\mathrm{d}^{\ell-1}f(x)}{\mathrm{d}x^{\ell-1}} + x\frac{\mathrm{d}^\ell f(x)}{\mathrm{d}x^\ell}\,.$$

Lösung der Aufgabe 11

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_{\ell-1}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\left[\frac{1}{2(\ell+1)}\frac{\mathrm{d}^{\ell+2}}{\mathrm{d}x^{\ell+2}}(x^2-1)^{\ell+1} - 2\ell\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^{\ell-1}\right]\\ &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[\frac{1}{2(\ell+1)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^{\ell+1} - 2\ell(x^2-1)^{\ell-1}\right]\end{aligned}$$

Mit dem Zwischenschritt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^{\ell+1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ell+1)(x^2-1)^\ell 2x\\ &= (\ell+1)\ell(x^2-1)^{\ell-1}(2x)^2 + 2(\ell+1)(x^2-1)^\ell\\ &= 2(\ell+1)(x^2-1)^{\ell-1}\left(2x^2\ell + x^2 - 1\right)\end{aligned}$$

vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_{\ell-1}}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^{\ell-1}\left[2\ell x^2 + x^2 - 1 - 2\ell\right]\\ &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^{\ell-1}(2\ell+1)\\ &= (2\ell+1)\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell = (2\ell+1)P_\ell\,.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt analog

$$\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left[\frac{1}{2(\ell+1)}\frac{\mathrm{d}^{\ell+2}}{\mathrm{d}x^{\ell+2}}(x^2-1)^{\ell+1} - x\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}(x^2-1)^\ell\right]$$

mit dem Zwischenschritt (man kann auch den Hinweis verwenden)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}} x f(x) &= \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[f(x) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right] \\
&= (\ell+1)\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}f(x) + x\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}f(x) \\
\Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}(x^2-1)^\ell &= \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[-\ell(x^2-1)^\ell + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^\ell\right]
\end{aligned}$$

vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left[\frac{1}{2(\ell+1)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^2-1)^{\ell+1} - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-1)^\ell + \ell(x^2-1)^\ell\right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^{\ell-1}\left[2\ell x^2 + x^2 - 1 - 2\ell x^2 + \ell(x^2-1)\right] \\
&= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^{\ell+1}}{\mathrm{d}x^{\ell+1}}(x^2-1)^\ell(\ell+1) \\
&= (\ell+1)\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell = (\ell+1)P_\ell\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) \\
&\overset{a)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x(\ell+1)P_\ell - \frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) \\
&\overset{a)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}P_{\ell+2}}{\mathrm{d}x} - (\ell+2)P_{\ell+1} - x(\ell+1)P_\ell - \frac{\mathrm{d}P_\ell}{\mathrm{d}x}\right) \\
&\overset{a)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((2(\ell+1)+1)P_{\ell+1} - (\ell+2)P_{\ell+1} - x(\ell+1)P_\ell\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((\ell+1)P_{\ell+1} - x(\ell+1)P_\ell\right) \\
&= (\ell+1)(\left(\frac{P_{\ell+1}}{\mathrm{d}x} - x\frac{P_\ell}{\mathrm{d}x} - P_\ell\right) \\
&\overset{a)}{=} (\ell+1)((\ell+1)P_\ell - P_\ell) = \ell(\ell+1)P_\ell
\end{aligned}$$