

Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Ausgabe: Fr, 17.11.17 – Abgabe: Fr, 24.11.17 – Besprechung: Mi, 29.11.17

Aufgabe 12: Randwertproblem in kartesischen Koordinaten

8 P

Betrachten Sie ein in z -Richtung unendlich ausgedehntes leitendes Rohr von rechteckigem Querschnitt. In der x - y -Ebene liegt das Rohr bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$. Das Potential bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ sei $\Phi = 0$. Bei $y = b$ habe das Rohr das Potential

$$\Phi(x, y = b) = V(x)$$

Bestimmen Sie das von z unabhängige Potential $\Phi(x, y)$ im ladungsfreien inneren des Leiters für

(a)

$$V(x) = V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$$

(b) und

$$V(x) = V_0 \left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right).$$

Hinweis:

Schreiben Sie die Randbedingung zunächst als Fourier-Reihe. Um die Koeffizienten der Fourierreihe zu bestimmen kann folgende Relation hilfreich sein:

$$\frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \delta_{nm}.$$

Lösung der Aufgabe 12

Bei diesem Problem handelt es sich um ein 2-dimensionales Randwertproblem. Die Laplace-Gleichung ist in diesem Fall gegeben durch

$$\Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0.$$

Mit dem Separationsansatz $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underbrace{\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}}_{-k^2} + \underbrace{\frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2}}_{k^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \\ g(y) = C e^{ky} + D e^{-ky} \end{cases} \end{aligned}$$

Anmerkung: Falls k^2 ein anderes Vorzeichen besitzt, werden die Argumente der Funktionen komplex, das führt nur zu einer Vertauschung von hyperbolischen und nicht hyperbolischen Funktionen.

Nun setzen wir die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} \Phi(x=0, y) &= 0 = A \\ \Rightarrow f(x) &= B \sin(kx) \\ \Phi(x, y=0) &= 0 = C + D \\ \Rightarrow g(x) &= C(e^{ky} - e^{-ky}) = 2C \sinh(ky) \\ \Phi(x=a, y) &= 0 = B \sin(ka) \\ \Rightarrow k &= \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtlösung eine Reihe über alle mögliche n :

$$\Phi(x, y) = \sum B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Um nun die Koeffizienten B_n zu bestimmen setzen wir die Vierte Randbedingung ein:

$$\Phi(x, y=b) = V(x) = \sum_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$$

Um die einzelnen Koeffizienten B_n zu bestimmen, wenden wir eine führen wir effektiv eine Fourierreihenentwicklung von $V(x)$ in dem wir beide Seiten über $\frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) V(x) &= \sum_n B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= \sum_n B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \delta_{mn} = B_m \sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right) \end{aligned}$$

Für alle B_n gilt somit:

$$B_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)} \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) V(x)$$

(a)

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)} \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \\ &= \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \delta_{n3} = \begin{cases} \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{3\pi b}{a}\right)} & \text{für } n = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Potential

$$\Phi(x, y) = V_0 \frac{\sinh\left(\frac{3\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi}{a}b\right)} \sin\left(\frac{3\pi}{a}x\right)$$

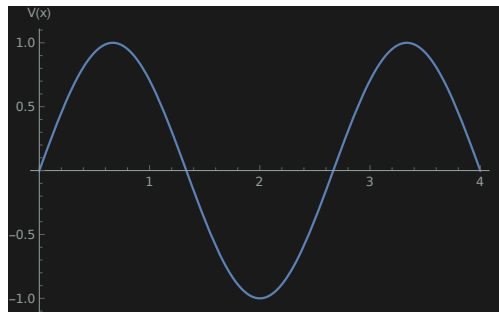


Abbildung 5: Verlauf des Potentials $V(x) = V_0 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$. Vielen Dank an Marcel Krause.

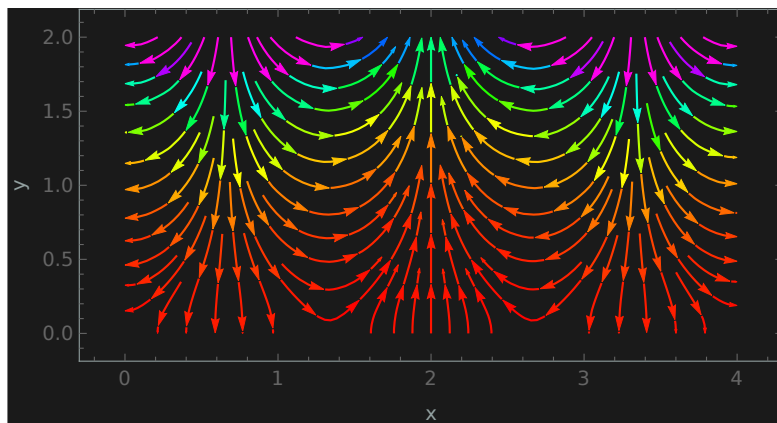


Abbildung 6: Feldlinienverlauf in xy-Ebene (12a). Oben befindet sich die nicht geerdete Fläche. Vielen Dank an Marcel Krause.

(b)

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)} \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) V_0 \left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right) \\ &= \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{m\pi}{a}b\right)} \frac{2}{a} \left[\int_0^{\frac{a}{2}} dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{2x}{a} + \int_{\frac{a}{2}}^a dx \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(2 - \frac{2x}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

Folgendes Integrale sind zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^{a_1} dx \sin(kx)x &= \left[-\frac{x}{k} \cos(kx)\right]_{a_0}^{a_1} + \frac{1}{k} \int_{a_0}^{a_1} dx \cos(kx) \\ &= \frac{a_0 \cos(ka_0) - a_1 \cos(ka_1)}{k} + \frac{\sin(ka_1) - \sin(ka_0)}{k^2}, \\ \int_{a_0}^{a_1} dx \sin(kx) &= \frac{\cos(ka_0) - \cos(ka_1)}{k}\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{4}{a^2} \frac{a}{n\pi} \left[-\frac{a}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - a \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + a + \frac{a}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{8}{n^2 \pi^2} \times \begin{cases} 1 & \text{für } n \bmod 4 = 1 \\ 0 & \text{für } n \bmod 2 = 0 \\ -1 & \text{für } n \bmod 4 = 3 \end{cases} \\ &= \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \frac{8}{n^2 \pi^2} \times \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } n \bmod 2 = 1 \\ 0 & \text{für } n \bmod 2 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Mit $n = 2k + 1$ wird es zu

$$B_{2k+1} = \frac{V_0}{\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi b}{a}\right)} \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} (-1)^k$$

Damit ergibt sich für das Potential

$$\Phi(x, y) = \frac{8V_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2} \frac{\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi}{a} y\right)}{\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi}{a} b\right)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{a} x\right)$$

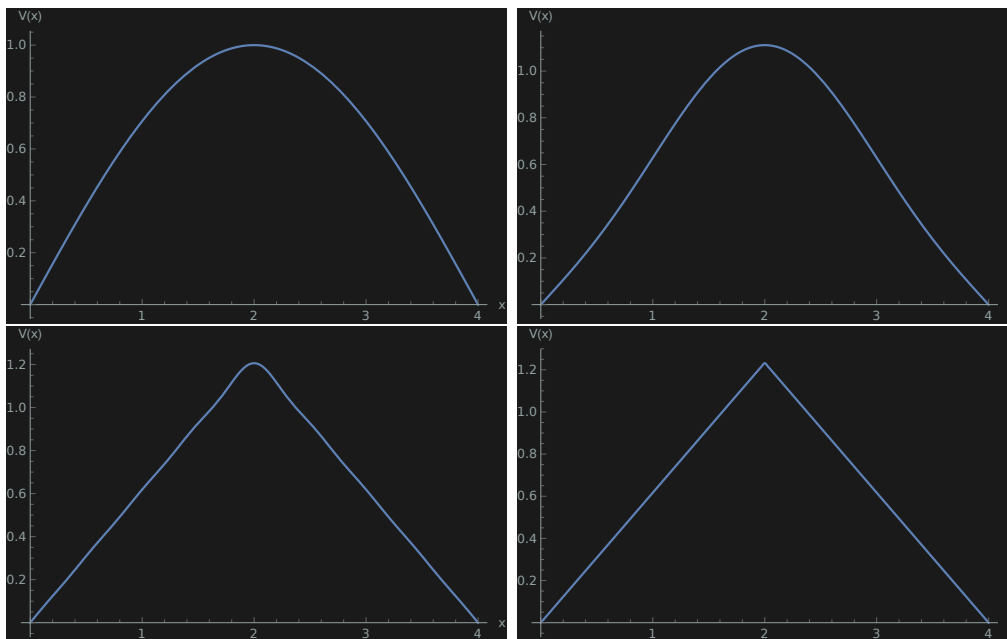


Abbildung 7: Evolution der Fouriersumme unter Berücksichtigung der ersten nicht-verschwindenden Summanden für das Potentials $V(x) = V_0 \left(1 - \left|\frac{2x}{a} - 1\right|\right)$ (1,2,3,4). Vielen Dank an Marcel Krause.

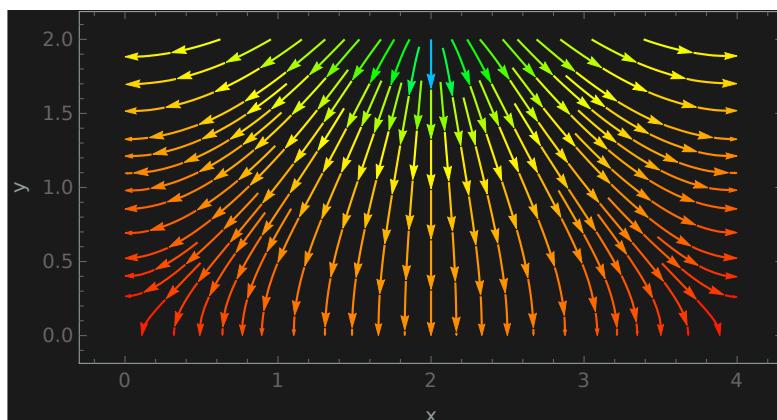
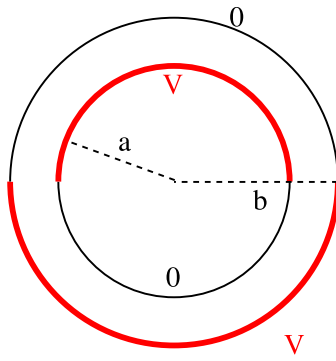


Abbildung 8: Feldlinienverlauf in xy -Ebene (12b). Oben befindet sich die nicht geerdete Fläche. Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 13: Konzentrische Hemisphären

6 P

Zwei konzentrische, leitende Kugelschalen mit Radien a, b ($a < b$) sind durch dieselbe Ebene in voneinander isolierte Halbkugeln geteilt. Die obere Hälfte der inneren Kugel und die untere Hälfte der äusseren haben das konstante Potential V , während die beiden übrigen Halbkugeln geerdet sind ($V = 0$).



Bestimmen Sie das Potential zwischen den Kugeln, also im Bereich $a < r < b$ als eine Reihe in Legendre Polynomen $P_\ell(\cos(\Theta))$. Nehmen Sie Terme bis mindestens $\ell = 4$ mit.

Hinweis:

Beachten Sie, dass das Potential azimuthal symmetrisch ist. Es kann hilfreich sein die Orthogonalitätsrelation der Legendre Polynome zu verwenden.

Lösung der Aufgabe 13

Das Potential ist azimuthal symmetrisch $\Phi(r, \Theta)$ ($m = 0$), das bedeutet folgender Separationsansatz kann verwendet werden.

$$\Phi(r, \Theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}) P_\ell(\cos(\Theta))$$

$$\Rightarrow \Phi(x, \Theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}) P_\ell(x)$$

mit $x = \cos(\Theta)$. Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \Phi(a, x) &= V, & x > 0 \\ \Phi(a, x) &= 0, & x \leq 0 \\ \Phi(b, x) &= 0, & x > 0 \\ \Phi(b, x) &= V, & x \leq 0 \end{aligned}$$

Mit der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) P_\ell(x) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell'\ell}$$

gilt allgemein

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \Phi(r, x) P_{\ell'}(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}) \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell'\ell} \\ &= \frac{2}{2\ell' + 1} (A_{\ell'} r^{\ell'} + B_{\ell'} r^{-(\ell'+1)}) . \end{aligned}$$

Für $r = a$ gilt somit

$$A_\ell a^\ell + B_\ell a^{-(\ell+1)} = \frac{2\ell + 1}{2} \int_0^1 dx V P_\ell(x) = \frac{(2\ell + 1)V}{2} \int_0^1 dx P_\ell(x) = \frac{(2\ell + 1)V}{2} I_\ell$$

und analog für $r = b$

$$\begin{aligned} A_\ell b^\ell + B_\ell b^{-(\ell+1)} &= \frac{(2\ell+1)V}{2} \int_{-1}^0 dx P_\ell(x) \\ &= \frac{(2\ell+1)V}{2} (-1)^\ell \int_0^1 dx P_\ell(x) = \frac{(2\ell+1)V}{2} (-1)^\ell I_\ell. \end{aligned}$$

mit $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$. Dies bedeutet, es gibt jeweils zwei Gleichungen für jedes A_ℓ und B_ℓ . Zunächst werten wir die Integrale I_ℓ für $\ell \leq 4$ aus:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_0(x) &= 1 \\ \int_0^1 dx P_1(x) &= \int_0^1 dx x = \frac{1}{2} \\ \int_0^1 dx P_2(x) &= \int_0^1 dx \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \\ \int_0^1 dx P_3(x) &= \int_0^1 dx \frac{1}{2}(4x^3 - 3x) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8} \\ \int_0^1 dx P_4(x) &= \int_0^1 dx \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{8}(7 - 10 + 3) = 0 \end{aligned}$$

Löse

$$\begin{aligned} I : \quad A_\ell a^\ell + B_\ell a^{-(\ell+1)} &= \frac{(2\ell+1)V}{2} I_\ell \equiv C \\ II : \quad A_\ell b^\ell + B_\ell b^{-(\ell+1)} &= (-1)^\ell C \\ a^{\ell+1}(I) \xRightarrow{-b^{\ell+1}(II)} A_\ell(a^{2\ell+1} - b^{2\ell+1}) &= C(a^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1}b^{\ell+1}) \\ (ab)^{\ell+1}(b^\ell(I) - a^\ell(II)) \xRightarrow{} B_\ell(b^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}) &= (ab)^{\ell+1}C(b^\ell + (-1)^{\ell+1}a^\ell) \\ \Rightarrow \quad A_\ell &= \frac{(2\ell+1)V}{2} I_\ell \frac{a^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1}b^{\ell+1}}{a^{2\ell+1} - b^{2\ell+1}} \\ \Rightarrow \quad B_\ell &= \frac{(2\ell+1)V}{2} I_\ell (ab)^{\ell+1} \frac{(-1)^\ell a^\ell - b^\ell}{a^{2\ell+1} - b^{2\ell+1}} \end{aligned}$$

Nur für $\ell = 0, 1, 3$ sind A_ℓ und B_ℓ von null verschieden

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{V}{2} \frac{a-b}{a-b} = \frac{V}{2} \\ A_1 &= \frac{3V}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^3 - b^3} \\ A_3 &= -\frac{7V}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^7 - b^7} \\ B_0 &= \frac{1V}{2} (ab)^1 \frac{1-1}{a^1 - b^1} = 0 \\ B_1 &= \frac{3V}{4} (ab)^2 \frac{-a-b}{a^3 - b^3} = -\frac{3V}{4} (ab)^2 \frac{a+b}{a^3 - b^3} \\ B_3 &= -\frac{7V}{16} (ab)^4 \frac{-a^3 - b^3}{a^7 - b^7} = \frac{7V}{16} (ab)^4 \frac{a^3 + b^3}{a^7 - b^7} \end{aligned}$$

Damit lautet das Potential

$$\begin{aligned}\Phi(r, x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)}) P_{\ell}(x) \\ &= \frac{V}{2} + \frac{3V}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2)r - (ab)^2(a + b)r^{-2}}{a^3 - b^3} P_1(x) \\ &\quad + \frac{7V}{16} \cdot \frac{-(a^4 + b^4)r^3 + (ab)^4(a^3 + b^3)r^{-4}}{a^7 - b^7} P_3(x) + \dots\end{aligned}$$

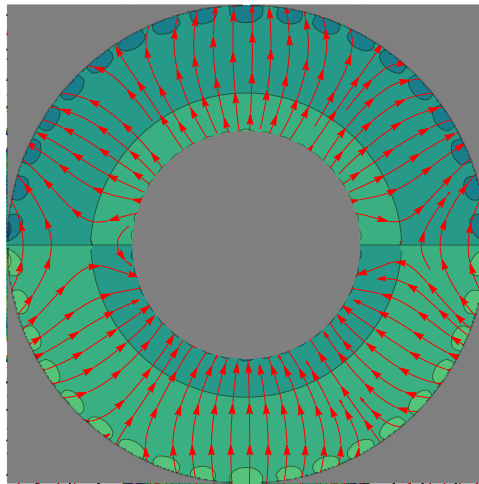


Abbildung 9: Äquipotentialflächen und Feldlinienverlauf im Zwischenraum der Kugelschalen. Vielen Dank an Marcel Krause.

Zusatz:

Eine allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \Theta) &= \frac{V}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)I_{\ell}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell+1}} \left[\left((-1)^{\ell} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\ell+1} \right) \left(\frac{r}{b}\right)^{\ell} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + (-1)^{\ell+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{\ell} \right) \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} \right] P_{\ell}(\cos(\Theta))\end{aligned}$$

Der Fall $a \ll b$:

$$\begin{aligned}\Phi(r, x) &= \frac{V}{2} + \frac{3V}{4} \left(-\frac{r}{b} + \frac{a}{r^2} \right) P_1(x) \\ &\quad + \frac{7V}{16} \left(\frac{r^3}{b^3} - \frac{a^4}{r^4} \right) P_3(x) + \dots \\ \lim_{a \rightarrow 0} \Phi(r, x) &= \frac{V}{2} - \frac{3V}{4} \frac{r}{b} P_1(x) + \frac{7V}{16} \frac{r^3}{b^3} P_3(x) + \dots \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \Phi(r, x) &= \frac{V}{2} + \frac{3V}{4} \frac{a}{r^2} P_1(x) - \frac{7V}{16} \frac{a^4}{r^4} P_3(x) + \dots\end{aligned}$$

(Kugel mit geladenen Hälften auf $\pm V$)

- (a) Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator $\vec{L}^2 = -\hbar^2(\vec{r} \times \nabla)^2$ (der Ihnen in der Quantenmechanik wiederbegegnen wird, zur Vereinfachung der Rechnung sei $\hbar = 1$) in Kugelkoordinaten explizit als Differentialoperator

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\Theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

geschrieben werden kann. Wie lautet der Zusammenhang mit dem Laplace-Operator?

- (b) Zeigen Sie, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_\ell^m(\Theta, \varphi)$ Eigenfunktionen von \vec{L}^2 zu den Eigenwerten $\ell(\ell+1)$ sind.

Hinweis:

Sie können die Relation, welche Sie in Aufgabe 11 a) und b) hergeleitet haben, verwenden.

Lösung der Aufgabe 14

Aus Aufgabe 9 ist die Parametrisierung in Kugelkoordinaten bekannt

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\Theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{r}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \Theta} &= \hat{\Theta}, & \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \Theta} &= -\hat{r}, & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \Theta} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= \sin(\Theta) \hat{\varphi}, & \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \varphi} &= \cos(\Theta) \hat{\varphi}, & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin(\Theta) \hat{r} - \cos(\Theta) \hat{\Theta}. \end{aligned}$$

- (a) Damit können wir das Vektorprodukt in Kugelkoordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \nabla &= r \hat{r} \times \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\Theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \underbrace{\hat{r} \times \hat{\Theta}}_{\hat{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \underbrace{\hat{r} \times \hat{\varphi}}_{-\hat{\Theta}} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \Theta} - \hat{\Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Damit ist das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
(\vec{r} \times \nabla)(\vec{r} \times \nabla) &= \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \Theta} - \hat{\Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \Theta} - \hat{\Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&\stackrel{\hat{\varphi} \cdot \hat{\Theta} = 0}{=} \hat{\varphi} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \Theta} \right)}_{=0} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \hat{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \Theta} \right)}_{=-\hat{r}} \frac{1}{\sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\
&\quad - \hat{\Theta} \frac{1}{\sin(\Theta)} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \right)}_{=-\sin(\Theta)\hat{r} - \cos(\Theta)\hat{\Theta}} \frac{\partial}{\partial \Theta} - \underbrace{\left(\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \varphi} \right)}_{\cos(\Theta)\hat{\varphi}} \frac{1}{\sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \hat{\Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
\Rightarrow \quad \vec{L}^2 &= -\frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

(b) Die Kugelflächenfunktion sind gegeben durch

$$Y_\ell^m = \underbrace{(-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{\ell+m!}}}_A P_\ell^m(\cos(\Theta)) e^{im\varphi}.$$

Ein Umschreiben der Ableitungen ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) &= \frac{1}{\sin(\Theta)} \underbrace{\frac{\partial \cos(\Theta)}{\partial \Theta}}_{-\sin(\Theta)} \frac{1}{\partial \cos(\Theta)} \sin(\Theta) \underbrace{\frac{\partial \cos(\Theta)}{\partial \Theta}}_{-\sin(\Theta)} \frac{1}{\partial \cos(\Theta)} \\
&\stackrel{x=\cos(\Theta)}{=} \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \\
\Rightarrow \vec{L}^2 &= -\frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{L}^2 Y_\ell^m &= A \left[-e^{im\varphi} \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} P_\ell^m(x) - \frac{P_\ell^m(x)}{1-x^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{im\varphi} \right] \\
&= -A e^{im\varphi} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} P_\ell^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2} P_\ell^m(x) \right]}_{\text{zug. Legendre'sche DGL: } -\ell(\ell+1)P_\ell^m(x)} \\
&= \ell(\ell+1) A P_\ell^m(x) e^{im\varphi} = \ell(\ell+1) Y_\ell^m \quad \square
\end{aligned}$$