Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 5

Ausgabe: Fr, 24.11.17 – Abgabe: Fr, 01.12.17 – Besprechung: Mi, 06.12.17

Aufgabe 15: Dipol in einer Kugel $\boxed{5\text{ P}}$

Wir betrachten einen Dipol aus zwei Punktladungen $\pm q$ bei $\pm a\hat{x}/2$.

(a) Wie lautet das Potential des Dipols im freien Raum, wenn $a \to 0$ bei festem $p = qa$?

(b) Jetzt befinde sich der Dipol ($a \to 0$) im Zentrum einer Kugelschale mit Radius b, auf der ein Potential

$$\Phi(b, \Theta) = V(\Theta) = V\cos(\Theta)$$

liegt. Θ ist der Polarwinkel bezüglich der z–Achse (nicht der x–Achse!). Bestimmen Sie das Potential $\Phi(r, \Theta)$ im Inneren der Kugelschale.
Hinweis:
Verwenden Sie die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen und nutzen Sie deren Orthogonalitätsrelation.

Lösung der Aufgabe 15

Das Potential eines Dipols für $a \to 0$ wurde bereits in Aufgabe 10 hergeleitet. Mit dem Dipolmoment

$$\vec{p} = q\left(\frac{\hat{a}}{2}\hat{x} - \left(-\frac{\hat{a}}{2}\hat{x}\right)\right) = qa\hat{x} = p\hat{x}$$

lautet das Potential des Dipols

$$\begin{aligned}
\Phi_{Dipol}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\hat{x}\cdot\vec{r}}{r^3} \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\sin(\Theta)\cos(\varphi)}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin(\Theta)\cos(\varphi)}{r^2}\,.
\end{aligned}$$

(a) Das Potential auf der Kugel ist gegeben durch

$$\Phi(b, \Theta) = V(\Theta) = V\cos(\Theta) \qquad = VP_1(\cos(\Theta)) = V\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0$$

Das Potential des Dipols kann ebenfalls als Funktion von Kugelflächenfunktionen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\Phi_{Dipol}(\vec{r}) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin(\Theta)\cos(\varphi)}{r^2} \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\sin(\Theta)\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\varphi}+e^{\mathrm{i}\varphi}\right) \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1}-Y_1^{1}\right)\end{aligned}$$

Nun betrachten wir das restliche Potential ohne Dipol. Dieses kann durch die allgemeine Entwicklung in Kugelflächenfunktionen beschrieben werden:

$$\Phi(r,\Theta,\varphi) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell m}r^{\ell}+B_{\ell m}r^{-(\ell+1)}\right)Y_\ell^m(\Theta,\varphi)$$

Die Terme $B_{\ell m}$ verschwinden im inneren der geerdeten Kugel. Das Potential innerhalb der geerdeten Kugel ist damit durch die Superposition mit dem Dipol gegeben durch:

$$\Phi(r,\Theta,\varphi) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1}-Y_1^{1}\right)+\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}r^{\ell}Y_\ell^m(\Theta,\varphi)$$

Auf den Rand $r=b$ gilt :

$$\Phi(r=b,\Theta,\varphi) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1}-Y_1^{1}\right)+\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}A_{\ell m}b^{\ell}Y_\ell^m(\Theta,\varphi) = V\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0$$

Mittels der Orthogonalitätsrelation

$$\int \mathrm{d}\Omega Y_{\ell'}^{m'*}Y_\ell^m = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

können die Koeffizienten einfach per Koeffizientenvergleich ermittelt werden:

$$\begin{aligned}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}+A_{11}b=0 \Rightarrow &\qquad A_{11} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 b^3} \\ \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{b^2}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}+A_{1-1}b=0 \Rightarrow &\qquad A_{1-1} = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 b^3} \\ A_{10}b = V\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow &\ A_{10} = \frac{V}{b}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\end{aligned}$$

Die restlichen $a_{\ell m}=0$ für $\ell\neq 0$ verschwinden. Damit ist das Potential innerhalb der Kugel

$$\begin{aligned}\Phi(r,\Omega) &= \frac{r}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[-\frac{1}{r^2}(Y_1^1-Y_1^{-1})+\frac{r}{b}\left(\frac{1}{b^2}(Y_1^1-Y_1^{-1})\right)\right]+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}VY_1^0\frac{r}{b} \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{r}{b^3}-\frac{1}{r^2}\right)\left(Y_1^1(\Omega)-Y_1^{-1}(\Omega)\right)+\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\underbrace{V}_{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}b^2}V'}Y_1^0(\Omega)\frac{r}{b} \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[\left(\frac{r}{b^3}-\frac{1}{r^2}\right)\left(Y_1^1(\Omega)-Y_1^{-1}(\Omega)\right)+V'Y_1^0(\Omega)\frac{r}{b^3}\right]\end{aligned}$$

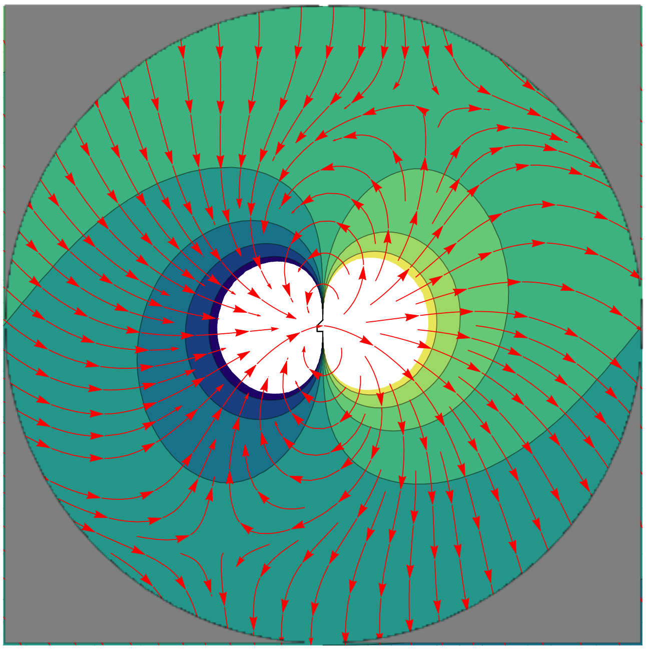

Abbildung 10: Feldlinien (rot) und senkrecht dazu Äquipotentiallinien (schwarz) eines Dipols in der Kugelschale. Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 16: Gleichseitiges Dreieck $\boxed{\textbf{5 P}}$

Drei Punktladungen $+q$ befinden sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a. Das Dreieck liege in der x–y–Ebene mit dem Schwerpunkt im Ursprung und einer Ecke auf der y–Achse. Im Schwerpunkt des Dreicks befindet sich noch eine weitere Punktladung $-3q$.

(a) Berechnen Sie das Monopol–, Dipol– und Quadrupolmoment der Ladungsverteilung.

(b) Bestimmen Sie den führenden Term des Potentials und das elektrische Feld für große Abstände $r \gg a$.

Lösung der Aufgabe 16

Die drei Punktladungen haben die folgenden Koordinaten in der x-y-Ebene ($z = 0$):

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \frac{a}{2}\hat{x} - s\hat{y}\\ \vec{r}_2 &= -\frac{a}{2}\hat{x} - s\hat{y}\\ \vec{r}_3 &= (h-s)\hat{y}\\ \vec{r}_{3q} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Nach Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{2} + h^2 &= a^2\\ \Rightarrow \qquad h &= \sqrt{1-\frac{1}{4}}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a\end{aligned}$$

Die Winkelalbierenden treffen sich im Schwerpunkt des Dreiecks:

$$\begin{aligned}\tan(\pi/6) &= \frac{s}{a/2}\\ \Rightarrow \qquad s &= \frac{a}{2}\tan(\pi/6) = \frac{a}{2\sqrt{3}}\\ \Rightarrow \qquad h-s &= \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Damit liegen die Ladungen bei

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \frac{a}{2}\left(\hat{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{y}\right)\\ \vec{r}_2 &= \frac{a}{2}\left(-\hat{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{y}\right)\\ \vec{r}_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a}{2}\hat{y}\\ \vec{r}_{3q} &= \vec{0}\end{aligned}$$

(a) Monopol:

$$\sum q_i = 0 = q$$

Dipol:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{x}\rho(\vec{x})\\ &= -3q\cdot 0 + \frac{aq}{2}\left((1-1)\hat{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}(-1-1+2)\hat{y}\right) = 0\end{aligned}$$

Quadropol:

$$
\begin{aligned}
Q_{ij} &= \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \left(3r_i r_j - \vec{r}^2 \delta_{ij}\right) \rho(\vec{x}) \\
&= \sum_{k=1}^{3} q_k \left(3r_i^{(k)} r_j^{(k)} - \vec{r}^{(k)2} \delta_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{3} q_k \left(-\vec{r}^{(k)2} \delta_{ij}\right) = -\frac{a^2 q}{4} \left(1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = -a^2 q
$$

Die Ladung im Ursprung trägt nicht bei, da $\vec{r}_{3q} = \vec{0}$.

$$
\begin{aligned}
Q_{xx} &= q\frac{a^2}{4}\,(3 * 2 - 4) = q\frac{a^2}{2} \\
Q_{yy} &= q\frac{a^2}{4}\left(3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) - 4\right) = q\frac{a^2}{2} \\
Q_{zz} &= -a^2 q \\
Q_{xy} &= q\frac{a^2}{4} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\
Q_{xz} &= Q_{yz} = 0
\end{aligned}
$$

Das Quadropolmoment ist spurlos:

$$
Q = \frac{qa^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

(b) Für große Abstände muss daher nur das Quadropolmoment berücksichtigt werden:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{ij} Q_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qa^2}{4r^5}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \\
&= \frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)
\end{aligned}
$$

Mit $\nabla r^\alpha = \alpha r^{\alpha-1}\hat{r}$ (Aufgabe 1) ist das E-Feld:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla\Phi = -\nabla\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) \\
&= -\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\nabla\frac{1}{r^3} - 3z^2\nabla\frac{1}{r^5} - \frac{3}{r^5}\nabla z^2\right) \\
&= -\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(-3\frac{1}{r^4}\hat{r} + 15z^2\frac{1}{r^6}\hat{r} - \frac{3}{r^5}2z\hat{z}\right) \\
&= -\frac{3qa^2}{16\pi\varepsilon_0 r^5}\left[\frac{5z^2 - r^2}{r}\hat{r} - 2z\hat{z}\right]
\end{aligned}
$$

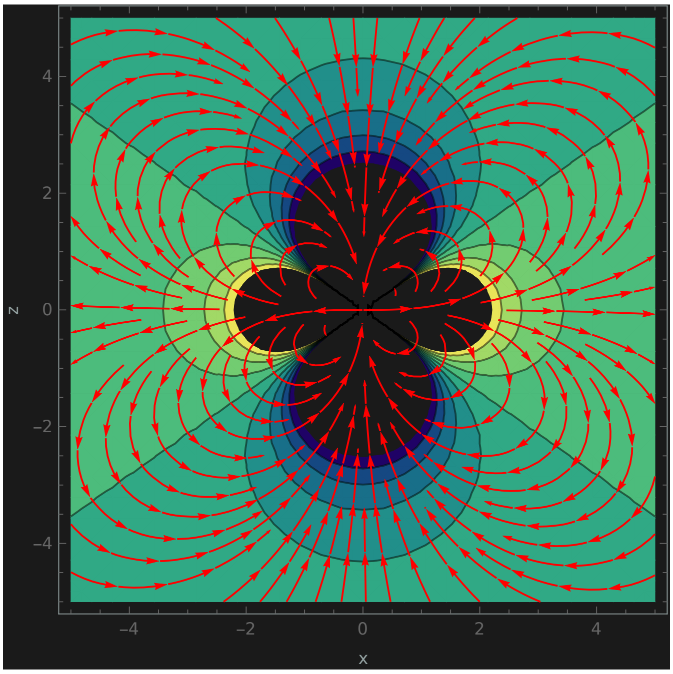

Abbildung 11: Feldlinien (rot) und senkrecht dazu Äquipotentiallinien (schwarz) gleichseitigen Dreiecks. Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 17: Azimuthal symmetrisches Randwertproblem — 5 P

Gegeben ist ein azimuthal symmetrisches Potential auf der z-Achse in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \Theta = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass das sich Potential nach einer Entwicklung in Legendre-Polynomen für $r > a$ wie folgt schreiben lässt:

$$\Phi(r, \Theta = 0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_{2\ell}}{r^{2\ell+1}}.$$

mit

$$\begin{aligned} b_0 &= 0\,, \\ b_{2\ell} &= -a^{2\ell}(-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es ist hilfreich die Wurzel $\sqrt{r^2 + a^2}$ als Abstand zweier Vektoren auszudrücken. Nutzen Sie die Punktsymmetrie für ungerade ℓ bei der Bestimmung von $P_\ell(0)$.

(b) Bestimmen Sie nun das Potential $\Phi(r > a, \Theta)$ für den gesamten Raum $r > a$ und ermitteln Sie das elektrische Feld des führenden Terms in Kugelkoordinaten.

(c) Argumentieren Sie, welche physikalisches Ausgangssituation dieses Potential beschreibt.

Lösung der Aufgabe 17

(a) Es sei

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{r}' = a\hat{\Theta}$$
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2}$$

Der Winkel γ zwischen den beiden Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ muss somit $\pi/2$ betragen und die Legendre-Entwicklung für $r > a$ mit $r_> = r$ und $r_< = a$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell\left(\cos(\gamma = \pi/2)\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell\left(0\right) \overset{P_{2\ell+1}(0)=0}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} P_{2\ell}\left(0\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2^{2\ell}(2\ell)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{2\ell}} \left(x^2-1\right)^{2\ell}\Big|_{x=0} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2^{2\ell}(2\ell)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{2\ell}} \sum_{k=0}^{2\ell} \binom{2\ell}{k} x^{2(2\ell-k)}(-1)^k\Big|_{x=0} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2^{2\ell}(2\ell)!} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{2\ell}{k} \frac{(4\ell-2k)!}{(2\ell-2k)!} x^{(2\ell-2k)}(-1)^k\Big|_{x=0} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2^{2\ell}(2\ell)!} \binom{2\ell}{\ell} \frac{(4\ell-2\ell)!}{0!}(-1)^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \frac{1}{2^{2\ell}(2\ell)!} \frac{(2\ell)!}{\ell!\ell!}(2\ell)!(-1)^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}} (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}
\end{aligned}$$

Der erste Term $\ell = 0$ kompensiert gerade die Ladung am Ursprung. Damit ergibt sich für das potential auf der z-Achse ($r = z$):

$$\Phi(r, \Theta = 0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_{2\ell}}{r^{2\ell+1}} \,.$$

mit

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0\,, \\
b_{2\ell} &= -a^{2\ell}(-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\,.
\end{aligned}$$

(b) Die Koeffizienten aus Aufgabenteil (a) sind die Koeffizienten der Entwicklung nach Legendrepolynomen des gesamten Potentials

$$\Phi(r,\Theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{b_{2\ell}}{r^{2\ell+1}}P_{2\ell}\left(\cos(\Theta)\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell+1}\frac{a^{2\ell}}{r^{2\ell+1}}P_{2\ell}\left(\cos(\Theta)\right)\frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}$$

Der führende Term ($\ell = 1$) des Potentials lautet:

$$\Phi_{\ell=1}(r,\Theta) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^3}P_2\left(\cos(\Theta)\right)$$

Das Komponenten des elektrische Feld $E = -\nabla\Phi$ sind

$$E_r = \frac{3qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2(\Theta)-1}{r^4}$$
$$E_\Theta = -\frac{qa^2}{16\pi\varepsilon_0}\frac{6\sin(\Theta)\cos(\Theta)}{r^4} = -\frac{qa^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{3\sin(\Theta)\cos(\Theta)}{r^4}$$
$$E_\varphi = 0$$

(c) Das Potential kann durch einen gleichmässig geladenen Ring mit Radius a und Ladung $-q$ und einer Punktladung q im Ursprung beschrieben werden.

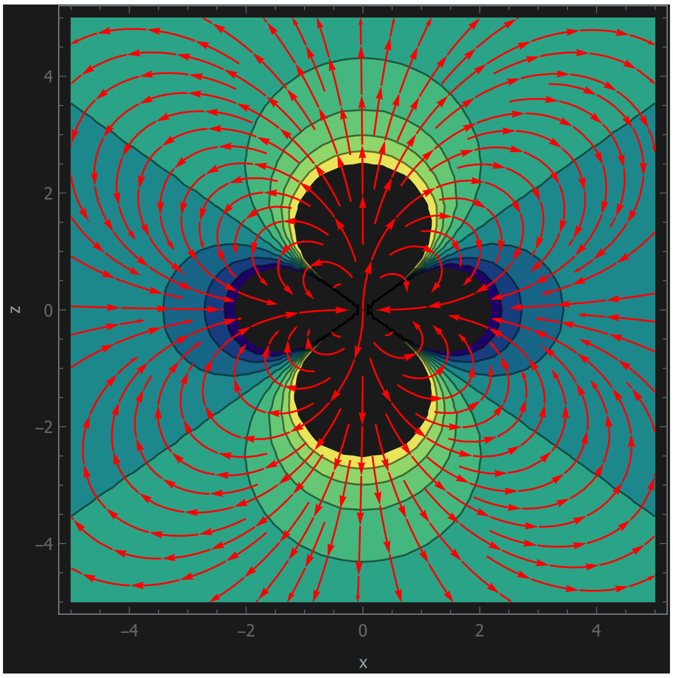

Abbildung 12: Feldlinien (rot) und senkrecht dazu Äquipotentiallinien (schwarz) einer Punktladung in einem Ring. Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 18: Invarianz der führenden Multipolmomente **5 P**

Verallgemeinerte kartesische Multipolmomente $Q_{\alpha\beta\gamma}$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ lassen sich als

$$Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r})x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad \text{(wobei } \ell = \alpha+\beta+\gamma)$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass sich jedes sphärische Multipolmoment $q_{\ell m}$ als Linearkombination der verschiedenen $Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma}$ schreiben lässt.

(b) Zeigen Sie, ausgehend von Teil (a), dass die führenden $q_{\ell m}$ invariant bleiben, wenn man den Ursprung des Koordinatensystems beliebig verschiebt. Erklären Sie auch, warum die höheren Momente von der Wahl des Ursprung abhängen. Was passiert, wenn man das Koordinatensystem zusätzlich noch verdreht?

Lösung der Aufgabe 18

(a) Das sphärische Multipolmoment ist gegeben durch

$$q_{\ell m} = \int \mathrm{d}^3\vec{r} Y_\ell^{m*}(\Theta,\varphi)r^\ell\rho(\vec{r})$$

mit

$$Y_\ell^m = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)}{(\ell+m)!}}P_\ell^m\left(\cos(\Theta)\right)e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$P_\ell^m(\cos(\Theta)) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-\cos(\Theta)^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{d\cos(\Theta)^{\ell+m}}(\cos(\Theta)^2-1)^\ell$$

Nun entwickeln wir jeden Term als Funktion von x,y und z
mit $r^2 = x^2+y^2+z^2$.

$$(1-\cos(\Theta)^2)^{m/2} = \left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)^{m/2} = \left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)^{m/2} = \frac{1}{r^m}\left(\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}\right)^{m/2}$$
$$= \frac{\rho^m}{r^m}$$

Nun den zweiten Teil, hier wollen wir nur zeigen, dass wir den Term als linearkombination von Potenzen von x, y und z schreiben können (Alle

Konstanten Terme werden in C absorbiert):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{d\cos(\Theta)^{\ell+m}}(\cos(\Theta)^2-1)^\ell &= \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{d\cos(\Theta)^{\ell+m}}\sum_{k=0}^{\ell} C_{1,k}\cos(\Theta)^{2k} \\
&= \sum_{k=(\ell+m)/2}^{\ell} C_{2,k}\cos(\Theta)^{2k-(\ell+m)} = \sum_{k=(\ell+m)/2}^{\ell} C_{2,k}\left(\frac{z}{r}\right)^{2k-(\ell+m)} \\
&= \frac{1}{r^{\ell-m}}\sum_{k=(\ell+m)/2}^{\ell} C_{2,k} z^{2k-(\ell+m)} r^{2\ell-2k} \\
&= \frac{1}{r^{\ell-m}}\sum_{k=(\ell+m)/2}^{\ell} C_{2,k} z^{2k-(\ell+m)}(x^2+y^2+z^2)^{\ell-k} \\
&\overset{2k-\ell-m+2\ell-2k=\ell-m}{=} \frac{1}{r^{\ell-m}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell-m} C_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma
\end{aligned}$$

Damit ist

$$P_\ell^m(\cos(\Theta)) = \frac{\rho^m}{r^m}\frac{1}{r^{\ell-m}}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell-m} C'_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

Anlog gilt für

$$\begin{aligned}
e^{\mathrm{i}\varphi m} &= \left(e^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m = (\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi))^m \\
&\overset{\rho^2=x^2+y^2}{=} \left(\frac{x}{\rho}+\mathrm{i}\frac{y}{\rho}\right)^m = \frac{(x+\mathrm{i}y)^m}{\rho^m} \\
&\overset{\text{analog}}{=} \frac{1}{\rho^m}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=m} C''_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Kugelflächenfunktionen wie folgt schreiben schreiben:

$$\begin{aligned}
Y_\ell^m =& \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)}{(\ell+m)!}}\left(\frac{\rho^m}{r^\ell}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell-m} C'_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma\right) \\
&\cdot\left(\frac{1}{\rho^m}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=m} C''_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma\right) \\
&= \frac{1}{r^\ell}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{\ell m} &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, Y_\ell^{m*}(\Theta,\varphi) r^\ell \rho(\vec{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3\vec{r}\frac{r^\ell}{r^\ell}\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma \rho(\vec{r}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r}) x^\alpha y^\beta z^\gamma \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} B_{\alpha,\beta,\gamma} Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}$$

(b) Bei einer translation gilt:

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{a}$$

Dies bedeutet für die Multipolmomente:

$$\begin{aligned}
q_{\ell m} \to &\sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r})(x+a_x)^\alpha (y+a_y)^\beta (z+a_z)^\gamma \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r}) x^\alpha y^\beta z^\gamma + \sum_{n=0}^{\ell-1} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} B'_{\alpha,\beta,\gamma} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\rho(\vec{r}) x^\alpha y^\beta z^\gamma \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma;\alpha+\beta+\gamma=\ell} B_{\alpha,\beta,\gamma} Q^{(\ell)}_{\alpha\beta\gamma} + \sum_{n=0}^{\ell-1} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} B'_{\alpha,\beta,\gamma} Q^{(n)}_{\alpha\beta\gamma} \\
&= q_{\ell m} + \sum_{n=0}^{\ell-1} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} B'_{\alpha,\beta,\gamma} Q^{(n)}_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}$$

Falls nun die Multipolmomente $q_{\ell' m} = 0$ für alle $\ell' < \ell$, d.h. $q_{\ell m}$ das führende Multipolmoment ist, verschwindet der zweite Summand und es gilt $q_{\ell m} \to q_{\ell m}$. Die nichtführende Multipolmomente ändern sich.
Bei Drehungen werden die führenden $q_{\ell m}$ für festes ℓ vermischt. Jedoch bleiben immer noch die $q_{\ell m}$ bei gleichem ℓ führend.