Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Ausgabe: Fr, 01.12.17 – Abgabe: Fr, 08.12.17 – Besprechung: Mi, 13.12.17

Aufgabe 19: Energie in einer geladenen Kugel [5 P]

Bestimmen Sie die im Kugelvolumen enthaltenen Energie einer geladenen Kugel mit Radius a und Ladungsdichte $\rho_V = \rho_0 \Theta(a-r)$ in zwei Schritten.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass das elektrische Feld in Kugelkoordinaten gegeben ist durch:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\hat{r} & \text{für } r < a \\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\hat{r} & \text{für } r \geq a \end{cases} .$$

(b) Bestimmen Sie nun mit der Energiedichte

$$w(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(r)$$

den Beitrag zur elektrostatischen Gesamtenergie W aus dem inneren einer Sphäre mit Radius R am Ursprung .

Lösung der Aufgabe 19

(a) Nach Gauß (kugelsymmetrisches Problem $\vec{E} = E_r\hat{r}$) gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \oint \mathrm{d}\vec{A}\, \vec{E}(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}V \rho_V(\vec{r}) \\ \Leftrightarrow \qquad 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_r &= \int_0^r \mathrm{d}r' r'^2 4\pi\rho_0\Theta(a-r') \\ &= \int_0^{\mathrm{Min}(a,r)} \mathrm{d}r' r'^2 4\pi\rho_0 \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho_0 \begin{cases} r^3 \text{ für } r < a \\ a^3 \text{ für } r \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

Damit gilt :

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r\hat{r} & \text{für } r < a \\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{a^3}{r^2}\hat{r} & \text{für } r \geq a \end{cases} .$$

(b) Das elektrische Feld ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r\Theta(a-r) + \frac{a^3}{r^2}\Theta(r-a)\right)\\
\Rightarrow\ E_r^2 &= \frac{\rho_0^2}{9\varepsilon_0^2}\left(r^2\Theta(a-r) + \frac{a^6}{r^4}\Theta(r-a)\right)
\end{aligned}
$$

Die Gesamtenergie muss nun über das Volumen einer Kugel mit Radius R bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
W(R) &= \int \mathrm{d}V \frac{\varepsilon_0}{2}E_r^2 = 4\pi \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \frac{\varepsilon_0}{2}E_r^2\\
&= \int_0^R \mathrm{d}r r^2 \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho_0^2}{9\varepsilon_0^2}\left(r^2\Theta(a-r) + \frac{a^6}{r^4}\Theta(r-a)\right)\\
&= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\begin{cases} \int_0^R \mathrm{d}r r^4 & \text{für } R < a\\ \int_0^a \mathrm{d}r r^4 + \int_a^R \mathrm{d}r \frac{a^6}{r^2} & \text{für } R \geq a\end{cases}\\
&= \frac{2\pi\rho_0^2}{9\varepsilon_0}\begin{cases} \frac{1}{5}R^5 & \text{für } R < a\\ \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{R} + a^5 & \text{für } R \geq a\end{cases}\\
&= \frac{2\pi\rho_0^2}{45\varepsilon_0}\begin{cases} R^5 & \text{für } R < a\\ a^5\left(6 - \frac{5a}{R}\right) & \text{für } R \geq a\end{cases}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20: Konzentrische Kugeln mit Dielektrikum **7 P**

Zwei konzentrische, leitende Kugeln mit inneren und äußeren Radien a und b haben ihren Mittelpunkt im Ursprung. Die innere Kugel trägt die Ladung $+Q$ und die äußere $-Q$. Für $z > 0$ sei der Raum zwischen den Kugeln mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstante $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ gefüllt.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld im Raum zwischen den Kugeln.

(b) Wie lautet die Oberflächenladungsdichte auf der inneren Kugel?

(c) Wie lautet die Polarisationsladungsdichte, die auf der Oberfläche des Dielektrikums nahe $r = a$ induziert wird?

Lösung der Aufgabe 20

(a) Am Rand des Dielektrikums muss gelten:

$$E^{\parallel}_{z>0} = E^{\parallel}_{z\leq 0}$$
$$D^{\perp}_{z>0} = D^{\perp}_{z\leq 0}$$

ohne Dielektrikum zeigt das E-Feld in Radialrichtung und lautet

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\,.$$

Damit sind die obige Bedingungen sind direkt erfüllt und $D^{\perp}$ verschwindet. $\Rightarrow$ Wir erwarten, dass das Feld mit Dielektrikum ebenfalls ein Radialfeld mit

$$\vec{E} = \alpha\frac{\hat{r}}{r^2}$$

ist. Mittels Gauß gilt dann

$$\begin{aligned}
Q &= \oint \vec{D}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \\
&= \oint \vec{D}\mathrm{d}S = \frac{\alpha\varepsilon_0}{r^2}\frac{4\pi r^2}{2} + \frac{\alpha\varepsilon}{r^2}\frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)\right)\alpha \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{Q}{2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)\right)} \\
\Rightarrow \vec{E} &= \frac{Q}{2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)\right)}\frac{\hat{r}}{r^2}
\end{aligned}$$

(b) Die Oberflächenladungsdichte auf der inneren Kugel lautet:

$$\begin{aligned}
\sigma = D^{\perp}(r=a) &= \begin{cases} -\varepsilon_0 E^{\perp} & z\leq 0 \\ -\varepsilon E^{\perp} & z>0 \end{cases} \\
&= \frac{Q}{2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)a^2}\begin{cases} \varepsilon_0 & z\leq 0 \\ \varepsilon & z>0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Test:

$$\begin{aligned}
Q &\overset{!}{=} \int \mathrm{d}\Omega\sigma \\
&= 2\pi a^2\frac{Q\varepsilon}{2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)a^2} + 2\pi a^2\frac{Q\varepsilon_0}{2\pi\left(\varepsilon_0+\varepsilon\right)a^2} = Q
\end{aligned}$$

(c) Polarisationsladungsdichte an der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$.

$$\begin{aligned}\rho_{\text{pol}} &= -\nabla \cdot \vec{p} \\ &= -\nabla\left(\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}\right) = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\nabla \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

Mit Gauß:

$$\begin{aligned} &\oint_{r=a} \mathrm{d}S \vec{p} \cdot \vec{n} = S \cdot p^{\perp}(r=a) = -\int \mathrm{d}V \rho_{\text{pol}} = -Q_{\text{pol}} \\ \Rightarrow \qquad & \sigma_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{pol}}}{S} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E^{\perp}\big|_{r=a} \\ & \qquad = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} \\ \Rightarrow & \sigma_{\text{pol}} + \sigma_{z>0}\big|_{r=a} \\ & \qquad = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} \frac{Q}{2\pi a^2} = \sigma_{z \leq 0} \end{aligned}$$

$\vec{E}$ ist radialsymmetrisch.

Aufgabe 21: Besselfunktionen — 8 P

Die Laplace–Gleichung in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) lautet

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

(a) Nutzen Sie für die Lösung der Laplace–Gleichung den Separationsansatz

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) F(\varphi) Z(z)\,.$$

Wie lautet die Radialgleichung, wenn die Differentialgleichungen für F und Z

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z\,, \qquad \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -\nu^2 F$$

lauten? Setzen Sie $x = k\rho$ (Bessel'sche Differentialgleichung).

(b) Lösen Sie die Bessel'sche Differentialgleichung mit dem Potenzreihenansatz

$$R(x) = x^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_j mit ungeradem Index verschwinden, während die geraden Koeffizienten die Rekursionsformel

$$a_{2j} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+\alpha)}$$

erfüllen. Dabei sollte auch $\alpha = \pm\nu$ herauskommen.

(c) Bestimmen Sie die ersten Koeffizienten explizit und zeigen, dass sie mit der Wahl $a_0 = 1/(2^\alpha \Gamma(\alpha+1))$

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)} \frac{1}{2^\alpha}$$

lauten. Die so bestimmten Radialfunktionen sind die Besselfunktionen erster Art der Ordnung $\pm\nu$.
Hinweis: Verwenden Sie $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(d) Wie verhalten sich die Besselfunktionen für $x \to 0$? Welches asymptotische Verhalten der Besselfunktionen bei $x \to \infty$ können Sie direkt aus der Differentialgleichung schließen?

Lösung der Aufgabe 21

(a) Einsetzen des Ansatzes

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)F(\varphi)Z(z)\,.$$

in die Laplace-Gleichung und teilen durch $R(\rho)F(\varphi)Z(z)$ ergibt

$$\underbrace{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 F}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}}_{\text{unabh. von Z} \to \text{Konstante } -k^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{\text{unabh. von } \rho,\varphi \to \text{Konstante } k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - k^2 = 0$$
$$\Rightarrow Z = A_Z e^{kz} + B_Z e^{kz}$$

Analog kann man man ρ und φ separieren

$$-k^2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 F}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \underbrace{\frac{\rho^2}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) - a\rho^2}_{+\nu^2} + \underbrace{\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}}_{-\nu^2}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \nu^2 F$$
$$\Rightarrow F = A_F e^{\mathrm{i}a\varphi} + B_F e^{\mathrm{i}a\varphi}$$

Analog verfahren wir mit R

$$\nu^2 = \frac{\rho^2}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho}\right) + k^2\rho^2$$
$$\Leftrightarrow\ 0 = \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R$$

Zur Bessel'schen Differentialgleichung gelangt in zwei Schritten. Zuerst teilen wir die komplette Gleichung durch k^2 und dann substituieren wir $x = k\rho$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 R}{k^2 \partial \rho^2} + \frac{1}{k\rho}\frac{\partial R}{k\partial \rho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{k^2\rho^2}\right) R \\
\Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial^2 R}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R
\end{aligned}
$$

(b) Zum Lösen der Differentialgleichung wird nun der vorgegeben Ansatz verwendet:

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Die Ableitungen der einzelnen Terme werden zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha) a_j x^{j+\alpha-1} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\alpha} &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)(j+\alpha-1) a_j x^{j+\alpha-2}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left((j+\alpha)(j+\alpha-1) + (j+\alpha) + x^2 - \nu^2\right) a_j x^{j+\alpha-2} \\
&= x^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left((j+\alpha)^2 - \nu^2\right) x^j + x^{j+2}\right] a_j \\
&\overset{x\neq 0}{=} \sum_{j=0}^{2} \left((j+\alpha)^2 - \nu^2\right) x^j a_j + \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left((j+2+\alpha)^2 - \nu^2\right) a_{j+2} + a_j\right] x^{j+2}
\end{aligned}
$$

Da die Gleichung für beliebige x erfüllt sein muss betrachten wir es Koeffizientenweise:

$$
\begin{aligned}
j = 0: &\qquad (\alpha^2 - \nu^2) a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = \pm\nu \text{ für } a_0 \neq 0 \\
j = 1: &\qquad (-\nu^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1) a_1 = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow (\pm 2\nu + 1) a_1 = 0 \quad \overset{\text{bel. }\nu}{\Rightarrow} a_1 = 0 \\
j \geq 2: &\qquad ((j+2)^2 + 2(j+2)\alpha + \alpha^2 - \nu^2) a_{j+2} = -a_j \\
&\qquad \Leftrightarrow (j+2)(j+2+2\alpha) a_{j+2} = -a_j \\
&\qquad \Leftrightarrow j'(j'+2\alpha) a_{j'} = -a_{j'-2} \ \Rightarrow a_{j'} = \frac{-a_{j'-2}}{j'(j'+2\alpha)}
\end{aligned}
$$

Durch die letzte Relation sind automatisch alle ungerade Koeffizienten 0. Somit gibt es nur nichtverschwindende gerade Koeffizienten (Fall $a_0 = 0$ später). Damit erhält man die Relation für $j' = 2j$

$$a_{2j} = \frac{-a_{2j-2}}{2j(2j+2\alpha)} = -\frac{a_{2(j-1)}}{4j(j+\alpha)}$$

mit $\alpha = \pm\nu$. Falls $a_0 = 0$, gibt es nur nichtverschwindene Koeffizienten ungerader Ordnung und dann gilt analog $\alpha = \pm\nu - 1$.

(c) Die Koeffizienten kann man somit sehr leicht als Produkt aufschreiben:

$$\begin{aligned}
a_{2j} &= a_0 \Pi_{i=1}^{j} \left(-\frac{1}{4i(i+\alpha)}\right) = a_0 \frac{(-1)^j}{4^j j!} \frac{1}{\Pi_{i=1}^{j}(i+\alpha)} \\
&= \frac{(-1)^j}{2^\alpha 4^j j!} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Pi_{i=1}^{j}(i+\alpha)} \\
&= \frac{(-1)^j}{2^\alpha 2^{2j} j!} \frac{1}{\underbrace{\Gamma(\alpha+1)(1+\alpha)}_{\text{Hinweis: } \Gamma(\alpha+2)} \Pi_{i=2}^{j}(i+\alpha)} \\
&= \frac{(-1)^j}{2^\alpha 2^{2j} j!} \frac{1}{\Gamma(\alpha+j+1)}
\end{aligned}$$

Damit lauten die Radialfunktionen:

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(\alpha+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\alpha}$$

(d) Für $x \to 0$ trägt der nur die kleinste Potenz von x bei

$$\lim_{x\to 0} R(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}$$

Speziell gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} R(\alpha = 0, x) &= 1 \\
\lim_{x\to 0} R(\alpha = 1, x) &= \frac{x}{2} \\
\lim_{x\to 0} R(\alpha = 2, x) &= \frac{x^2}{8}
\end{aligned}$$

Für $x \to$ vereinfacht sich die DGL zu

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 R}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\partial^2 R}{x^2} + R \\
\Rightarrow R &\sim A\cos(x) + B\sin(x)
\end{aligned}$$