

Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 7

Ausgabe: Fr, 08.12.17 - Abgabe: Fr, 15.12.17 - Besprechung: Mi, 19.12.17

Aufgabe 22: Spulenformel

6 P

Durch eine spiralförmige Spule, $\vec{r} = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi), a\varphi)$ mit n Windungen und der Länge L (mit $L/n \ll 2\pi R$) fließt ein Gleichstrom I.

- (a) Bestimmen Sie das Magnetfeld entlang der Spulenachse.
- (b) Wie verhält sich das Feld auf der Spulenachse in der Mitte der Spule und in großen Abständen $|z|\gg L$?

Hinweis:

Überzeugen Sie sich, dass die Korrekturterme klein sind, wenn Sie eine Windung als Ring annähern.

Lösung der Aufgabe 23

(a) Hier benutzen wir die in der Vorlesung hergeleitete Gleichung:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

In Zylinderkoordinaten und mit

$$\vec{r}' = R\hat{\rho}' + a\varphi'\hat{z}\,,\tag{1}$$

$$\vec{r} = z\hat{z} \,, \tag{2}$$

wobei $a = L/(2\pi n)$ können wir φ' als Integrationsparameter definieren

$$d\vec{l}' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi'} d\varphi' = (R\hat{\varphi}' + a\hat{z}) d\varphi'$$

Damit lautet das B-Feld:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2a}^{L/2a} d\varphi' (R\hat{\varphi}' + a\hat{z}) \times \frac{-R\hat{\rho}' + (z - a\varphi')\hat{z}}{(R^2 + (a\varphi' - z)^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2a}^{L/2a} d\varphi' \frac{R^2 \hat{z} + R(z - a\varphi')\hat{\rho}' - zR\hat{\varphi}'}{(R^2 + (a\varphi' - z)^2)^{3/2}}$$

Mit der angegebenen Näherung $a \ll 2\pi R$ können wir alle Terme ausser \hat{R} , vernachlässigen, da jeder Ring nur ein Beitrag in \hat{z} gibt.

$$\begin{split} \vec{B}(z) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2a}^{L/2a} \mathrm{d}\varphi' \frac{R^2 \hat{z}}{(R^2 + (a\varphi' - z)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \hat{z} \left[\frac{a\varphi' - z}{aR^2 \sqrt{R^2 + (a\varphi' - z)^2}} \right]_{-L/2a}^{L/2a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{z} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I n}{2L} \hat{z} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + z)^2}} \right] \end{split}$$

(Anmkerkung: Bei einer Entwicklung von $\frac{a}{\rho} \to 0$ sieht man direkt, dass φ aus dem Nenner nicht beiträgt.)

(b) In der Mitte des Feldes gilt z=0:

$$\vec{B}(z=0) = \frac{\mu_0 In}{2L} \hat{z} \left[\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} + \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2})^2}} \right]$$
$$= \mu_0 In \frac{1}{\sqrt{4R^2 + L^2}}$$

Und für große Abstände:

$$\begin{split} \lim_{z \to \infty} \vec{B}(z) &= \lim_{z \to \infty} \frac{\mu_0 In}{2L} \hat{z} \left[\frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(z - L/2)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{(z + L/2)^2}}} \right] \\ &\stackrel{\text{Aufg.6}}{=} \lim_{z \to \infty} \frac{\mu_0 In}{2L} \hat{z} \left[-(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{(z - L/2)^2}) + (1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{(z + L/2)^2}) \right] \\ &= \lim_{z \to \infty} \frac{\mu_0 In R^2}{4L} \hat{z} \left[\frac{1}{(z - L/2)^2} - \frac{1}{(z + L/2)^2} \right] = \frac{\mu_0 In R^2}{4L} \hat{z} \frac{2zL}{z^4} \\ &= \frac{\mu_0 In R^2}{2z^3} \hat{z} \end{split}$$

Aufgabe 23: Magnetfeld einer rotierenden Scheibe

6 P

Betrachten Sie eine rotierende Scheibe mit Radius R und vernachlässigbarer Dicke, die sich mit konstanter Wingelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um ihr Zentrum dreht. Eine

Ladung Q sei gleichmäßig auf der Scheibe verteilt. Berechnen Sie die magnetische Induktion B auf der Drehachse.

Hinweis:

Verwenden Sie die Stromladungsdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Lösung der Aufgabe 23

Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\pi R^2} \delta(z)$$

und vereinfacht das Integral des Biot-Savart Gesetzes auf zwei Dimensionen:

$$\begin{split} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V \frac{\rho \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{\pi R^2} \int_{\text{Scheibe}} \mathrm{d}A \frac{(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^3} \end{split}$$

Es soll der Strom auf der Drehachse bestimmt werden. Somit wählen wir

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = z\hat{z}$$

Die Scheibe ist Senkrecht zur Drehachse. Mit Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gilt nun:

$$\vec{r}' = \rho' \hat{\rho}'$$

$$dA = \rho' d\rho' d\varphi'$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}') = \omega \rho' (\hat{z} \times \hat{\rho}') \times (-\rho' \hat{\rho}' + z\hat{z})$$

$$= \omega \rho' \hat{\varphi} \times (-\rho' \hat{\rho}' + z\hat{z})$$

$$= \omega \rho'^2 \hat{z} + \omega \rho' z \hat{\rho}'$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}'|^{-3} = ({\rho'}^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Da $\hat{\rho}' = \cos(\varphi')\hat{x} + \sin(\varphi')\hat{y}$ und der restliche Term des Integrals unabhängig von φ' ist, verschwindet dieser Term proportional zu $\hat{\rho}'$ wegen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sin(\varphi') = 0 = \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos(\varphi').$$

Damit lautet das B-feld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{\pi R^2} \omega \hat{z} 2\pi \int_0^R d\rho' \rho' \frac{{\rho'}^2}{({\rho'}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{Q\mu_0 \omega}{2\pi R^2} \hat{z} \underbrace{\int_0^R d\rho' \rho' \frac{{\rho'}^2}{({\rho'}^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\mathcal{B}}$$

Mit der Substitution $u = {\rho'}^2 + z^2$ wird das Integral zu:

$$\begin{split} \mathcal{B} &= \frac{1}{2} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \mathrm{d}u \frac{u - z^2}{u^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{R^2 + z^2} \mathrm{d}u \left(\frac{1}{u^{1/2}} - \frac{z^2}{u^{3/2}} \right) \\ &= \left. \left(u^{1/2} + z^2 u^{-1/2} \right) \right|_{z^2}^{R^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - |z| - \frac{z^2}{|z|} \\ &= \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2|z| = 2 \left(\frac{z^2 + \frac{R^2}{2}}{\sqrt{R^2 + z^2}} - |z| \right) \end{split}$$

Wegen $\frac{z^2 + \frac{R^2}{2}}{\sqrt{R^2 + z^2}} > |z|$ ist das B-Feld

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q \omega}{\pi R^2} \left(\frac{z^2 + \frac{R^2}{2}}{\sqrt{R^2 + z^2}} - |z| \right) \hat{z}$$

nach oben gerichtet.

Aufgabe 24: Ladungsdichte eines Wasserstoffatoms

8 P

Eine ausgedehnte Ladungsverteilung habe die Dichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{-e}{64\pi a_0^5} r^2 e^{-r/a_0} \sin^2(\Theta)$$

mit dem Bohr'schen Atomradius $a_0 = \varepsilon_0 h/(\pi m e^2) = 0.529 \times 10^{-10} m$ und der Elementarladung e. Dies enspricht der Ladungsdichte der $m = \pm 1$ -Zustände des 2p-Niveaus des Wasserstoffatoms.

- (a) Geben Sie eine Multipolentwicklung für das Potential an, das dieser Ladungsdichte entspricht, und bestimmen Sie alle nichtverschwindenen Multipolmomente. Drücken Sie zusätzlich das Potential in großen Abständen vom Ursprung durch eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen aus.
- (b) Bestimmen Sie das Potential explizit an jedem Raumpunkt und zeigen Sie, dass es in der Nähe des Ursprungs bis einschließlich zur Ordnung r^2 durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120a_0^2} P_2(\cos(\Theta)) \right]$$

gegeben ist, wenn $\lim_{r\to\infty} \Phi(\vec{r}) = 0$ verlangt wird.

(c) Für den Fall, dass sich am Ursprung ein Kern mit Gesamtladung $\int dV \rho_K = Ze$ und dem Quadrupolmoment $Q_{33}/e \equiv Q_{zz}/e = 10^{-28} \text{m}^2$ befindet, bestimme man den Betrag der Wechselwirkungsenergie. Drücken Sie das Ergebnis durch eine Frequenz aus, indem Sie durch das Plank'sche Wirkungsquantum h dividieren.

Anmerkung: Die Quadrupolwechselwirkung besitzt die gleiche Größenordnung, wie man sie in Molekülen findet.

Hinweise:

Integrale der Art $\int_a^b \mathrm{d}x e^{-x/a} x^l$ dürfen Sie nachschlagen oder mit einem Computerprogramm lösen.

Die sogenannte Feinkstrukturkonstane $\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h c}$ hat den Wert $\alpha = \frac{1}{137,036}$.

Lösung der Aufgabe 24

(a) Diese Ladungsverteilung ist azimutal symmetrisch. Nur die m=0 Momente werden nicht verschwinden. Desweiteren können wir

$$\sin^2(\Theta) = 1 - \cos^2(\Theta) = \frac{2}{3} \left[P_0(\cos(\Theta)) - P_2(\cos(\Theta)) \right]$$

in Legendrepolynome entwickeln. Die Momente sind dann gegeben durch

$$\begin{split} q_{\ell 0} &= \int \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d} \cos(\Theta) r^2 \rho(r,\Theta) r^\ell Y_{\ell 0}^* \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d} \cos(\Theta) r^{\ell+2} \rho(r,\Theta) P_\ell(\cos(\Theta)) \\ &= -\frac{2\pi e}{64\pi a_0^5} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_0^\infty \mathrm{d}r r^{\ell+4} e^{-r/a_0} \int_{-1}^1 \mathrm{d} \cos(\Theta) P_\ell(\cos(\Theta)) \left[P_0(\cos(\Theta)) - P_2(\cos(\Theta)) \right] \\ &\stackrel{\mathrm{Hinweis}}{=} \frac{-e}{48\pi a_0^5} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \Gamma(\ell+5) a_0^{\ell+5} \left[2\delta_{\ell,0} - \frac{5}{2}\delta_{\ell,2} \right] = \frac{a_0^{\ell} e}{48\pi} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \Gamma(\ell+5) \left[2\delta_{\ell,0} - \frac{5}{2}\delta_{\ell,2} \right] \end{split}$$

Daher gibt es nur zwei nicht verschwindene Multipolmomente:

$$q_{00} = -\sqrt{\frac{1}{4\pi}}e$$
$$q_{20} = 6\sqrt{\frac{5}{4\pi}}a_0^2e$$

Aus der Multipolentwicklung kann nun das Potential für große Abstände bestimmt werden:

$$\Phi = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell,m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} q_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}(\Theta, \varphi)}{r^{\ell + 1}}$$

$$= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} q_{\ell 0} \frac{P_{\ell}(\Theta, \varphi)}{r^{\ell + 1}}$$

$$= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{6a_0^2}{r^3} P_2(\cos(\Theta)) \right]$$

(b) Wir benutzen die Green'sche Funktion um das Potential an jedem Punkt im Raum zu bestimmen. Im allgemeinen gilt:

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \sum_{\ell m} \frac{4\pi}{2\ell + 1} \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell m}^{*}(\Theta', \varphi') Y_{\ell m}(\Theta, \varphi)$$

Durch die azimutal Symmetrie, müssen wir nur die m=0 Terme der Entwicklung betrachten:

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \sum_{\ell} \frac{r_{\leq}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos(\Theta')) P_{\ell}(\cos(\Theta)) + \text{Terme}(m \neq 0)$$

Daraus folgt:

$$\begin{split} &\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-2\pi e}{64\pi a_0^5} \frac{2}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}r' r'^4 e^{-r'/a_0} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos(\Theta') P_\ell(\cos(\Theta')) \left[P_0(\cos(\Theta')) - P_2(\cos(\Theta')) \right] P_\ell(\cos(\Theta)) \\ &= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^5} \frac{1}{48} \left[\frac{1}{r^{\ell+1}} \int_0^r \mathrm{d}r' r'^{\ell+4} e^{-r'/a_0} + r^\ell \int_r^\infty \mathrm{d}r' r'^{3-\ell} e^{-r'/a_0} \right] \left[2\delta_{\ell,0} - \frac{2}{5} \delta_{\ell,2} P_2(\cos(\Theta)) \right] \\ &= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^5} \frac{1}{24} \left[\left(\frac{1}{r} \int_0^r \mathrm{d}r' r'^4 e^{-r'/a_0} + \int_r^\infty \mathrm{d}r' r'^3 e^{-r'/a_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_2(\cos(\Theta))}{5} \left(\frac{1}{r^3} \int_0^r \mathrm{d}r' r'^6 e^{-r'/a_0} + r^2 \int_r^\infty \mathrm{d}r' r' e^{-r'/a_0} \right) \right] \end{split}$$

Die einzelnen Terme kann man nun per partieller Integration lösen. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{split} \Phi(\vec{r}) = & \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^5} \frac{1}{24} \left[\frac{1}{r} \left(24a_0^5 - e^{-r/a_0} \left(24a_0^5 + 24a_0^4r + 12a_0^3r^2 + 4a_0^2r^3 + a_0r^4 \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{r} e^{-r/a_0} \left(6a_0^4r + 6a_0^3r^2 + 3a_0^2r^3 + a_0r^4 \right) \\ & - \frac{P_2(\cos(\Theta))a_0^7}{r^3} \left(144 - e^{-r/a_0} \left(144 + \frac{r}{a_0} + 72\frac{r^2}{a_0^2} + 24\frac{r^3}{a_0^3} + 6\frac{r^4}{a_0^4} + 6\frac{r^5}{5a_0^5} + \frac{r^6}{5a_0^6} \right) \right. \\ & + e^{-r/a_0} \left(\frac{a_0^2r^5 + a_0r^6}{5} \right) \right) \right] \\ = & \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^5} \frac{1}{24} \left[\frac{1}{r} \left(24a_0^5 - e^{-r/a_0} \left(24a_0^5 + 18a_0^4r + 6a_0^3r^2 + a_0^2r^3 \right) \right) \right. \\ & - \frac{P_2(\cos(\Theta))}{r^3} \left(144a_0^7 - e^{-r/a_0} \left(144a_0^7 + 144a_0^6r + 72a_0^5r^2 + 24a_0^4r^3 + 6a_0^3r^4 + a_0^2r^5 \right) \right] \\ = & \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(1 - e^{-r/a_0} \left(1 + \frac{3}{4}\frac{r}{a_0} + \frac{1}{4}\frac{r^2}{a_0^2} + \frac{1}{24}\frac{r^3}{a_0^3} \right) \right) \\ & - \frac{6P_2(\cos(\Theta))a_0^2}{r^3} \left(1 - e^{-r/a_0} \left(1 + \frac{r}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a_0^2} + \frac{1}{6}\frac{r^3}{a_0^3} + \frac{1}{24}\frac{r^4}{a_0^4} + \frac{1}{144}\frac{r^5}{a_0^5} \right) \right] \end{split}$$

Im Limes $r \to 0$ lautet die Entwicklung der Exponentialfunktion

$$e^{r/a_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{r}{a_0}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{r}{a_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{a_0}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{r}{a_0}\right)^4 + \frac{1}{120} \left(\frac{r}{a_0}\right)^5 + \mathcal{O}(r^5)$$

https://www.itp.kit.edu/courses/ws2017/theoc

Anstelle die Exponentialfunktion zu entwickeln, kann man nun auch die Polynomreihe umschreiben:

$$\lim_{r \to 0} \Phi(\vec{r}) = \lim_{r \to 0} \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(1 - e^{-r/a_0} \left(e^{r/a_0} - \frac{1}{4} \frac{r}{a_0} - \frac{1}{4} \frac{r^2}{a_0^2} - \frac{3}{24} \frac{r^3}{a_0^3} + \mathcal{O}(r^4) \right) \right) - \frac{6P_2(\cos(\Theta))a_0^2}{r^3} \left(1 - e^{-r/a_0} \left(e^{r/a_0} - \frac{1}{720} \frac{r^5}{a_0^5} + \mathcal{O}(r^6) \right) \right) \right]$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{4a_0} e^{-r/a_0} + \mathcal{O}(r^3) - \frac{P_2(\cos(\Theta))}{a_0^3} \left(\frac{1}{120} r^2 e^{-r/a_0} + \mathcal{O}(r^3) \right) \right]$$

$$= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120a_0^2} P_2(\cos(\Theta)) \right]$$

(c) Die Wechselwirkungsenergie eines Kerns am Ursprung ist gegeben durch

$$W = \int d^3 \vec{r} \rho_K \Phi(\vec{r}) \approx \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \int d^3 \vec{r} \rho_K \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120a_0^2} P_2(\cos(\Theta)) \right]$$

Mit $\int d^3 \vec{r} \rho_K = Ze$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ und $z = r \cos(\Theta)$ kann man direkt den ersten Teil des Integrals auusführen:

$$W \approx \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \left[\frac{Ze}{4} - \frac{1}{240a_0^2} \int d^3 \vec{r} \rho_K r^2 \left(3\cos^2(\Theta) - 1 \right) \right]$$
$$= \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \left[\frac{Ze}{4} - \frac{1}{240a_0^2} \underbrace{\int d^3 \vec{r} \rho_K \left(3z^2 - r^2 \right)}_{Q_{33}} \right]$$
$$= \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \left[\frac{Z}{4} - \frac{Q_{33}/e}{240a_0^2} \right]$$

Der erste Term ist die elektrostatische Wechselwirkungsenergie. Die Wechselwirkungsenergie des Quadropols (als Frequenz ausgedrückt) lautet:

$$\frac{W}{h} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0 h} \frac{Q_{33}/e}{240a_0^2} = \frac{\alpha c Q_{33}}{480\pi a_0^3} \approx 5MHz$$

Diese Kernquadrupolwechselwirkung mit dem elektrischen Feld der Elektronenwolke führt typischerweise zu Radiofrequenzresonanzen (im niedrigen Megahertzbereich), der unter Verwendung des nuklearen Prozesses nachgewiesen werden kann: Kernquadrupolresonanz-Spektroskopie (NQR). Da NQR empfindlich auf die elektronische Struktur ist (dh chemische Bindungen), hat es einige Anwendungungen in der Entdeckung von Sprengstoffen. Insbesonders Stickstoff ist ein häufiges Element in vielen Sprengstoffen. Da ¹⁴N ein Quadrupolmoment ungleich null besitzt, kann NQR verwendet werden, um festzustellen, welche Arten von Stickstoffverbindungen in einer Probe vorhanden sein können.

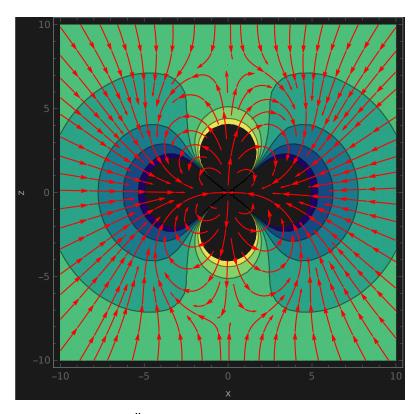


Abbildung 13: z-Ansicht der Äquipotentialflächen und Feldlinien des Wasserstoffatoms in Fernfeldnäherung. Vielen Dank an Marcel Krause.

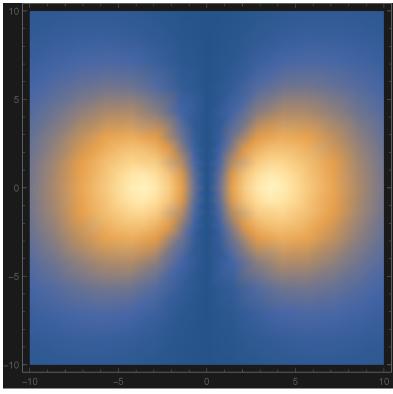


Abbildung 14: x-z-Ansicht der Ladungsdichte des Wasserstoffatoms. Vielen Dank an Marcel Krause.

Aufgabe 25: Helmholtz-Spulen

5 P

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a wird vom Strom I durchflossen und liegt innerhalb der x-y-Ebene bei z=0. Eine weitere Schleife mit gleichem Radius liegt parallel dazu bei z=b und wird ebenfalls vom Strom I durchflossen. Wie lautet das \vec{B} -Feld entlang der z-Achse? Bestimmen Sie b so, dass das \vec{B} -Feld genau zwischen den Spulen, bei z=b/2 besonders homogen wird.

Lösung der Aufgabe 25

Das \vec{B} -Feld ist gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Der Ring kann einfach mit Zylinderkoordinaten parametrisiert werden:

$$d\vec{l} = a \left(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0 \right) d\varphi$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \left(x - a\cos(\varphi), y - a\sin(\varphi), z \right)$$

$$d\vec{l} \times \vec{r} - \vec{r}' = ad\varphi \left(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), -y\sin(\varphi) + a\sin^2(\varphi) - x\cos(\varphi) + a\cos^2(\varphi) \right)$$

$$B(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} ad\varphi \frac{(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} a \frac{(0, 0, 2\pi a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Dies ist das Feld einer Spule auf der z-Achse. Per Superposition wird nun das Gesamtfeld zweier Spulen (eine bei z=0 und eine bei z=b) auf der z-Achse bestimmt:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z - b)^2)^{3/2}} \right)$$

Das Feld in der Mitte der Spule soll möglichst homogen sein, also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} \bigg|_{z=b/2} &\stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}z^2} \bigg|_{z=b/2} &\stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} \bigg|_{z=b/2} &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2} \cdot 3 \left(\frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{z - b}{(a^2 + (z - b)^2)^{5/2}} \right) \bigg|_{z=b/2} \\ &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2} \cdot 3 \left(\frac{b/2}{(a^2 + (b/2)^2)^{5/2}} - \frac{b/2}{(a^2 + (b/2)^2)^{5/2}} \right) \bigg|_{z=b/2} = 0 \end{aligned}$$

Dies ist immer erfüllt.

$$\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}z^2} \bigg|_{z=b/2} = \frac{-3\mu_0 I a^2}{2} \left(\frac{a^2 + z^2 - 5z^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{a^2 + (z-b)^2 - 5(z-b)^2}{(a^2 + (z-b)^2)^{7/2}} \right) \bigg|_{z=b/2}$$

$$= \frac{-3\mu_0 I a^2}{2} \frac{a^2 - 4(b/2)^2 + a^2 - 4(b/2)^2}{(a^2 + (b/2)^2)^{7/2}} = 0$$

$$\Rightarrow a = b$$

Eine Helmoltz-Spule hat somit den gleichen Abstand zwischen den Ringen wie der Durchmesser der einzelnen Ringe. Im Mittelpunkt zwischen beiden Ringen ist ein besonders homogenes Magnetfeld.