Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 8

Ausgabe: Fr, 15.12.17 – Abgabe: Fr, 22.12.17 – Besprechung: Mi, 10.01.18

Aufgabe 24: Helmholtz-Spulen — 5 P

Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a wird vom Strom I durchflossen und liegt innerhalb der x–y–Ebene bei $z = 0$. Eine weitere Schleife mit gleichem Radius liegt parallel dazu bei $z = b$ und wird ebenfalls vom Strom I durchflossen. Wie lautet das $\vec{B}$–Feld entlang der z–Achse? Bestimmen Sie b so, dass das $\vec{B}$–Feld genau zwischen den Spulen, bei $z = b/2$ besonders homogen wird.

Lösung der Aufgabe 24

Das $\vec{B}$-Feld ist gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \mathrm{d}\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Der Ring kann einfach mit Zylinderkoordinaten parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l} &= a\,(-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)\,\mathrm{d}\varphi \\
\vec{r} - \vec{r}' &= (x - a\cos(\varphi), y - a\sin(\varphi), z) \\
\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r} - \vec{r}' &= a\mathrm{d}\varphi\,\big(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), -y\sin(\varphi) + a\sin^2(\varphi) - x\cos(\varphi) + a\cos^2(\varphi)\big) \\
B(0,0,z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} a\mathrm{d}\varphi \frac{(z\cos(\varphi), z\sin(\varphi), a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} a \frac{(0, 0, 2\pi a)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}
\end{aligned}$$

Dies ist das Feld einer Spule auf der z-Achse. Per Superposition wird nun das Gesamtfeld zweier Spulen (eine bei $z = 0$ und eine bei $z = b$) auf der z-Achse bestimmt:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z - b)^2)^{3/2}} \right)$$

Das Feld in der Mitte der Spule soll möglichst homogen sein, also gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=b/2} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B_z}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=b/2} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=b/2} &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2}\cdot 3\left.\left(\frac{z}{(a^2+z^2)^{5/2}}+\frac{z-b}{(a^2+(z-b)^2)^{5/2}}\right)\right|_{z=b/2}\\ &= \frac{-\mu_0 I a^2}{2}\cdot 3\left.\left(\frac{b/2}{(a^2+(b/2)^2)^{5/2}}-\frac{b/2}{(a^2+(b/2)^2)^{5/2}}\right)\right|_{z=b/2} = 0\end{aligned}$$

Dies ist immer erfüllt.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2B_z}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=b/2} &= \frac{-3\mu_0 I a^2}{2}\left.\left(\frac{a^2+z^2-5z^2}{(a^2+z^2)^{7/2}}+\frac{a^2+(z-b)^2-5(z-b)^2}{(a^2+(z-b)^2)^{7/2}}\right)\right|_{z=b/2}\\ &= \frac{-3\mu_0 I a^2}{2}\,\frac{a^2-4(b/2)^2+a^2-4(b/2)^2}{(a^2+(b/2)^2)^{7/2}} = 0\\ \Rightarrow \quad a &= b\end{aligned}$$

Eine Helmoltz-Spule hat somit den gleichen Abstand zwischen den Ringen wie der Durchmesser der einzelnen Ringe. Im Mittelpunkt zwischen beiden Ringen ist ein besonders homogenes Magnetfeld.

Aufgabe 25: Abschirmung paralleler Leiter $\boxed{\textbf{10 P}}$

Zwei unendlich lange gerade Leiter befinden sich parallel zur z–Achse bei $x = \pm d/2$, $y = 0$. Die Leiter werden entgegengesetzt von einem Gleichstrom $\pm I$ durchflossen.

(a) Zunächst betrachten Sie nur einen unendlich langen Draht in einem Medium mit μ_r.

  (i) Wie lautet das $\vec{H}$–Feld im ganzen Raum um den Draht in Zylinderkoordinaten?
  Hinweise:
  Sie dürfen für diesen Teil annehmen, dass der Draht sich bei $x = 0$ befindet.

$$\nabla_{\mathrm{Zyl}} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

  (ii) Die Stromdichte ist auf den Draht begrenzt, also läßt sich das $\vec{H}$–Feld durch ein skalares Potential Φ_m beschreiben, so dass $\vec{H} = -\nabla\Phi_m$. Bestimmen Sie das skalare Potential in kartesischen Koordinaten, wenn sich der Draht bei $x = a$, $y = 0$ befindet.

(b) Nun betrachten Sie beide Leiter bei $x = \pm d/2$

(i) Bestimmen Sie analog zu (a) das skalare Potential des Leiterpaares. Zeigen Sie, dass das Potential bei kleinem Abstand $d \ll \rho$ in Zylinderkoordinaten

$$\Phi_m = -\frac{Id\sin(\varphi)}{2\pi\rho}$$

(ii) Die Drähte befinden sich nun im Zentrum eines Stahlzylinders mit innerem Radius a und äußerem Radius b und Permeabilität $\mu = \mu_0\mu_r$. Das Potential kann (immer noch im Limes $d \ll \rho$) dann innerhalb und außerhalb des Zylinders als

$$\Phi_m = \begin{cases} \frac{\alpha}{\rho}\sin(\varphi) & \rho > b \\ \left(\beta\rho + \frac{\gamma}{\rho}\right)\sin(\varphi) & a < \rho \leq b \\ \left(-\frac{Id}{2\pi\rho} + \delta\rho\right)\sin(\varphi) & \rho \leq a \end{cases}$$

angesetzt werden. Damit ist das äußere Feld ebenfalls ein Dipolfeld, wie in Teil (i). Bestimmen Sie die reellen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus geeigneten Randbedingen an die $\vec{B}$– und $\vec{H}$–Felder. Zeigen Sie damit, dass das äußere Feld gegenüber dem Feld ohne den Zylinder um einen Faktor

$$F = \frac{4\mu_r b^2}{(\mu_r+1)^2 b^2 - (\mu_r-1)^2 a^2}$$

schwächer ist.

Lösung der Aufgabe 25

(a) (i) Beginnend mit einem langen Draht auf der z-Achse. Dieser besitzt das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = j(r)\hat{z} \Rightarrow \vec{A} = A_z\hat{z}$$

Da der Stom konstant ist, gilt $A_z = A_z(r)$ und ist unabhängig von φ und z.

$$\Rightarrow \nabla\times\vec{A} \overset{\text{Hinweis}}{=} -\frac{\partial A_z}{\partial r}\hat{\varphi} = \mu_r\mu_0\vec{H}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{H} = H_\varphi(r)\hat{\varphi} = H(r)\hat{\varphi}$$

Nun bestimmen wir $H(r)$ mittels der Integration über die Kreisfläche und den Satz von Stokes:

$$\int_A \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j} = I = \int_A \mathrm{d}\vec{S} \left(\nabla \times \vec{H}\right)$$
$$= \oint_{\partial A} \mathrm{d}\vec{r}\vec{H} = H_\varphi \cdot 2\pi r$$
$$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

(ii) Da ausserhalb des Drahtes $\nabla \times \vec{H} = 0$ ist, kann man das $\vec{H}$ mit einem Skalar beschreiben :

$$\vec{H} = -\nabla \Phi_m$$

Da

$$\vec{H} = \vec{H}(r)\hat{\varphi}$$
$$\Rightarrow H(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_m}{\partial \varphi} = \frac{I}{2\pi r}$$
$$\Rightarrow \Phi_m = -\frac{I}{2\pi}\varphi + C$$

Wir wählen $C = 0$. Der Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ wird vom Punkt $(x = a|y = 0)$ bestimmt, daher gilt in kartesichen Koordinaten (theoretisch kann φ auch Werte von $[0, 2\pi) + 2n\pi$ annehmen. Der Beitrag $2\pi n$ kann jedoch in C absorbiert werden und hat keinen physikalischen Beitrag.):

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x-a}$$
$$\Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x-a}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad \Phi_m = -\frac{I}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x-a}\right)$$

(b) (i) Das Potential von zwei Leitern ist eine Superposition von einem Leiter mit Strom I bei $d/2$ und einem Leiter mit Strom $-I$ bei $-d/2$:

$$\Phi_m = -\frac{I}{2\pi}\left(\arctan\left(\frac{y}{x-d/2}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x+d/2}\right)\right)$$

Für kleine Abstände $d \ll \rho = x^2+y^2$ können wir eine Taylor-Entwicklung um $d \to 0$ vornehmen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\arctan\left(\frac{y}{x \pm d/2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x\pm d/2}\right)^2}\frac{-y(\pm\frac{1}{2})}{(x \pm d/2)^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}d}\arctan\left(\frac{y}{x \pm d/2}\right)\Bigg|_{d=0} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{\mp y/2}{x^2} = \frac{\mp y/2}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{\mp y}{2\rho^2} = \frac{\mp \sin(\varphi)}{2\rho}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{d\to 0}\Phi_m &= -\frac{I}{2\pi}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{\sin(\varphi)}{2\rho} - \frac{-\sin(\varphi)}{2\rho}\right)d\right) + \mathcal{O}(\rho^{-2})\\ &\approx -\frac{I}{2\pi}\frac{d}{\rho}\sin(\varphi)\end{aligned}$$

(ii) Die Drähte befinden sich nun in einem Zylinder mit den Regionen $\rho > b$, $a < \rho < b$ und $\rho < a$. An den Übergängen ist sowohl H_φ als auch B_ρ stetig. Wir benutzen den Ansatz:

$$\Phi_m = \begin{cases} \frac{\alpha}{\rho}\sin(\varphi) & \rho > b \\ \left(\beta\rho + \frac{\gamma}{\rho}\right)\sin(\varphi) & a < \rho \leq b \\ \left(-\frac{Id}{2\pi\rho} + \delta\rho\right)\sin(\varphi) & \rho \leq a \end{cases}$$

Damit ist

$$H_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\varphi} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\rho^2}\cos(\varphi) & \rho > b \\ -\left(\beta + \frac{\gamma}{\rho^2}\right)\cos(\varphi) & a < \rho \leq b \\ \left(\frac{Id}{2\pi\rho^2} - \delta\right)\cos(\varphi) & \rho \leq a \end{cases}$$

Mit $\mu = \mu_0\mu_r$ gilt analog

$$B_\rho = -\mu\frac{\partial\Phi_m}{\partial\rho} = \begin{cases} \mu_0\frac{\alpha}{\rho^2}\sin(\varphi) & \rho > b \\ \mu\left(-\beta + \frac{\gamma}{\rho^2}\right)\sin(\varphi) & a < \rho \leq b \\ -\mu_0\left(\frac{Id}{2\pi\rho^2} + \delta\right)\sin(\varphi) & \rho \leq a \end{cases}$$

Durch die Stetigkeitsbedinungen erhält man nun 4 Gleichungen, um $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} I: &\quad \frac{\alpha}{b^2} = \beta + \frac{\gamma}{b^2} \\ II: &\quad \mu_0\frac{\alpha}{b^2} = \mu\left(-\beta + \frac{\gamma}{b^2}\right) \\ III: &\quad \beta + \frac{\gamma}{a^2} = \delta - \frac{Id}{2\pi a^2} \\ IV: &\quad \mu\left(-\beta + \frac{\gamma}{a^2}\right) = -\mu_0\left(\delta + \frac{Id}{2\pi a^2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I: &\quad \frac{\alpha}{b^2} - \quad \beta - \quad \frac{\gamma}{b^2} &&= 0\\
II: &\quad \frac{\alpha}{b^2} + \quad \mu_r\beta - \quad \mu_r\frac{\gamma}{b^2} &&= 0\\
III: &\quad \beta + \quad \frac{\gamma}{a^2} - \delta &&= -\frac{Id}{2\pi a^2}\\
IV: &\quad -\mu_r\beta + \quad \mu_r\frac{\gamma}{a^2} + \delta &&= -\frac{Id}{2\pi a^2}\\
V: II - I: &\quad (1+\mu_r)\beta + (1-\mu_r)\frac{\gamma}{b^2} &&= 0\\
VI: III - IV: &\quad (1-\mu_r)\beta + (1+\mu_r)\frac{\gamma}{a^2} &&= -\frac{Id}{\pi a^2}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
(1+\mu_r)b^2V - (1-\mu_r)a^2VI : \left((1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2\right)\beta = (1-\mu_r)\frac{Id}{\pi}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{2(1-\mu_r)a^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}\frac{Id}{2\pi a^2}\\
\gamma &= -\frac{2(1+\mu_r)a^2b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}\frac{Id}{2\pi a^2}\\
\delta &= \left[\frac{(1-\mu_r)a^2 - (1+\mu_r)b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2} + \frac{1}{2}\right]\frac{Id}{\pi a^2} = \frac{(1-\mu_r^2)a^2 - (1-\mu_r^2)b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}\frac{Id}{2\pi a^2}\\
\alpha &= \left[\frac{(1-\mu_r)a^2 - (1+\mu_r)a^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}\right]\frac{Id}{\pi a^2}b^2 = \frac{-4\mu_r a^2b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}\frac{Id}{2\pi a^2}
\end{aligned}
$$

Damit ist das potential im Außenraum :

$$
\Phi_{m;\rho>b} = \frac{4\mu_r b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2} \times \underbrace{\frac{-Id\sin(\varphi)}{2\pi\rho}}_{\Phi_m;\text{ohne}}
$$

D.h. das Feld ist um einen Faktor

$$
F = \frac{4\mu_r b^2}{(1+\mu_r)^2b^2 - (1-\mu_r)^2a^2}
$$

reduziert.