

## Klassische Theoretische Physik III (Elektrodynamik)

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. M. Sekulla

### Übungsblatt 9

Ausgabe: Fr, 22.12.17 – Abgabe: Fr, 12.01.17 – Besprechung: Mi, 17.01.18

#### Aufgabe 26: Unendlich langer stromdurchflossener Draht 5 P

Betrachten Sie einen homogenen, unendlich langen Draht mit Radius  $R$  und konstanter Leitfähigkeit  $\kappa$ . Das Ohm'sche Gesetz besagt, dass die Stromdichte durch  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$  gegeben ist. Im Draht befindet sich ein konstantes, zeitunabhängiges elektrisches Feld  $\vec{E}$  parallel zur Richtung des Drahtes.

Berechnen Sie den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  für dieses System auf unterschiedliche Weisen:

- (a) mit Hilfe des Erhaltungssatzes in differentieller (lokaler) Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E},$$

wobei  $u$  die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist.

- (b) mit der Formel

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Es ist hilfreich sich vorher die Richtung des Poynting-Vektors zu überlegen.

#### Lösung der Aufgabe 26

- (a) Der Strom kann durch die Funktion (in Zylinderkoordinaten  $\rho, \varphi, z$ )

$$\vec{J}(\vec{r}) = \kappa \vec{E} \Theta(R - \rho) = \kappa E \Theta(R - \rho) \hat{z}$$

beschrieben werden.  $u$  ist zeitunabhängig (statisches Feld).

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E} \Theta(R - \rho) = -\kappa E^2 \Theta(R - \rho)$$

Da  $\vec{J}$  und  $\vec{E}$  parallel zur  $z$ -Achse sind, ist  $\vec{H}$  parallel zu  $\hat{\varphi}$ . Damit zeigt  $\vec{S}$  in  $\hat{z} \times \hat{\varphi} = -\hat{\rho}$ -Richtung. Mit

$$\begin{aligned} \vec{S} &= -S(\rho) \hat{\rho} \\ \nabla \cdot \vec{S} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho S) \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho S) = \kappa E^2 \Theta(R - \rho)$$

Damit gilt :

$$\rho S = \begin{cases} \frac{\kappa E^2}{2} \rho^2 + C_1 & \text{für } \rho \leq R \\ C_2 & \text{für } \rho > R \end{cases}$$

Für  $\rho = 0$  ist  $S = 0$ , daher ist  $C_1 = 0$ . Desweiteren ist  $C_2 = 0$ , da es das elektrische Feld außerhalb des Zylinders verschwindet. Damit ist der Poyntingvektor:

$$\vec{S} = \begin{cases} -\frac{\kappa E^2 \rho}{2} \hat{\rho} & \text{für } \rho \leq R \\ \vec{0} & \text{für } \rho > R \end{cases}$$

- (b) Zunächst bestimmen wir das H-Feld eines konstanten Stroms in einem Draht mit Radius  $R$ . Um das  $\vec{H}$  zu bestimmen nutzen wir

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}.$$

Hier führen wir eine Integration über die Fläche in der  $(x, y)$ -Ebene aus. Dies lässt sich gemäß des Satzes von Stokes auf der linken Seite dann umformen in

$$\int_A dA \vec{\nabla} \times \vec{H} = \int d\vec{s} \cdot \vec{H} = \int d\varphi r H(\rho) = 2\pi r H(\rho)$$

Hierbei wurde  $d\vec{s} = r d\varphi \hat{\phi}$  gewählt. Betrachtet man die Poisson-Gleichung  $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\vec{J}$ , so ist klar, dass das Vektorpotential entlang des Stromes orientiert sein muss. Andererseits kann es nur vom Abstand zur Achse abhängen, also ist  $\vec{A} = A(\rho) \hat{z}$ . Damit folgt, dass  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = H(\rho) \hat{\phi}$  gilt. Dies erklärt obigen Zusammenhang. Die rechte Seite ist wiederum innerhalb und außerhalb des Drahtes auszuwerten. Wir erhalten:

$$2\pi \rho H(\rho) = \begin{cases} \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{\rho^2}{R^2} & \text{für } \rho \leq R \\ I & \text{für } \rho > R \end{cases}$$

Somit ist das Magnetfeld gegeben durch:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi} \begin{cases} \frac{\rho}{R^2} & \text{für } r \leq R \\ \frac{1}{\rho} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Mit  $\vec{J} = \kappa \vec{E} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$  gilt nun:

$$H(r) = \frac{\kappa E}{2} \begin{cases} \rho & \text{für } \rho \leq R \\ \frac{R^2}{\rho} & \text{für } r\rho > R \end{cases}$$

Somit ist der Poynting Vektor:

$$\vec{S}(\vec{\rho}) = \vec{E}(\vec{\rho}) \times \vec{H}(\vec{\rho}) = E(\vec{\rho})\hat{z} \times H(\vec{\rho})\hat{\varphi} = -\frac{\kappa E^2}{2}\hat{\rho} \begin{cases} \rho & \text{für } \rho \leq R \\ \vec{0} & \text{für } \rho > R \end{cases}$$

### Aufgabe 27: Induktivität eines abgeschirmten Leiters

5 P

Durch einen langen Draht mit Durchmesser  $2b$  und Permeabilität  $\mu$  fließt ein Strom  $I$ . Der Draht befindet sich in der Luft und ist von einer leitenden zylindrischen Hülle vom Radius  $a > b$  umschlossen, durch die der Strom zurückfließt. Die Achsen von Draht und Hülle fallen zusammen.

- (a) Angenommen, die Stromdichte ist konstant über den Querschnitt des Drahtes. Wie lautet die Selbstinduktivität pro Längeneinheit des Stromkreises?

*Hinweis:*

Um die Selbstinduktivität zu bestimmen nutzen Sie die Formel  $W = \frac{1}{2}LI^2$

- (b) Wie lautet die Selbstinduktivität pro Längeneinheit, wenn der Draht durch einen Hohlleiter vom Radius  $b$  ersetzt wird?

### Lösung der Aufgabe 27

- (a) Mit einer konstanten Stromdichte im Leiter gilt:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2}\hat{z}\Theta(b - \rho)$$

Nun müssen wir zwischen 3 Fällen unterscheiden,  $\rho \leq b$ ,  $b < \rho \leq a$  und  $\rho > a$ . Das Magnetfeld kann analog wie in Aufgabe 26 b) aus dem Amperschen Gesetz abgeleitet werden. Dabei müssen wir für den Fall  $b < \rho \leq a$  bedenken, dass  $\mu = \mu_0$  in der Luft ist. Für  $a > \rho$  ist der umschlossene Gesamtstrom  $I - I = 0$  und somit verschwindet der Term

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} = \nabla \times \frac{B}{\mu} \\ \stackrel{26b)}{\Rightarrow} B(\rho) &= \begin{cases} \frac{\mu I \rho}{2\pi b^2}\hat{\varphi} & \text{für } \rho \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}\hat{\varphi} & \text{für } b < \rho \leq a \\ 0 & \text{für } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir zunächst die Energie pro Länge:

$$\begin{aligned}
 W/l &= \frac{1}{2} \int_0^a d\rho \vec{B} \cdot \vec{H} 2\pi\rho \\
 &= \frac{I^2 2\pi}{2(2\pi)^2} \left[ \int_0^b d\rho \mu \frac{\rho^2}{b^4} \rho + \int_b^a d\rho \mu_0 \frac{\rho}{\rho^2} \right] \\
 &= \frac{I^2}{4\pi} \left[ \frac{\mu}{b^4} \int_0^b d\rho \rho^3 + \mu_0 \int_b^a d\rho \frac{1}{\rho} \right] \\
 &= \frac{I^2}{4\pi} \left[ \frac{\mu}{4} + \mu_0 \ln \left( \frac{a}{b} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Damit gilt nun für die Induktivität:

$$L/l = 2W/(lI^2) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{\mu_r}{4} + \ln \left( \frac{a}{b} \right) \right]$$

- (b) Nun wird der innere Leiter mit einem Hohlleiter ersetzt, d.h. der Strom ist auf  $\rho = b$  beschränkt. Damit gibt es kein  $\vec{B}$ -Feld innerhalb von  $\rho \leq b$ . Auf analoge Weise kann nun das B-Feld bestimmt werden:

$$B(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\varphi} & \text{für } b < \rho \leq a \\ 0 & \text{für } \rho > a \end{cases}$$

Damit lässt sich nun analog zu oben, die Energie  $W$  und daraus die Selbstinduktion  $L$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
 W/l &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left( \frac{a}{b} \right) \\
 L/l &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{a}{b} \right)
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 28: Rotierende Christbaumkugel

10 P

Eine Christbaumkugel vom Radius  $R$  trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung  $Q$ . Sie rotiere mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$  um ihren Durchmesser.

- (a) Bestimmen Sie die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  und das magnetische Moment  $\vec{m}$  der Kugel für  $\hat{\omega} \parallel \hat{z}$ .
- (b) Berechnen Sie das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  und das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$  innerhalb und außerhalb der Kugel.

*Hinweis:*

Es vereinfacht die Integration, wenn Sie  $\vec{r}$  entlang der  $z$ -Achse ausrichten und die Richtung von  $\hat{\omega}$  nicht festlegen.

*Kontrollerggebnis:*

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \frac{r^3}{r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

mit  $r_< = \min(r, R)$ .

- (c) Angenommen, das Magnetfeld der Erde ließe sich so beschreiben. Seine horizontale Komponente hat in Karlsruhe die Stärke von etwa  $20\mu\text{T}$ . Bestimmen Sie daraus die Größe des magnetischen Moments und die im Erdmagnetfeld gespeicherte Energie

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r} \vec{B}^2$$

(das Integral erstreckt sich nur über den Außenraum der Kugel). Vergleichen Sie mit der kinetischen Energie der täglichen Rotation der Erde. Zahlenwerte für den Vergleich: Geographische Breite von Karlsruhe  $\beta = 49^\circ$ ; Radius der Erde  $R \approx 6400 \text{ km}$ ; Masse der Erde  $M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

### Lösung der Aufgabe 28

- (a) Die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  kann aus der homogenen Ladungsdichte auf der Oberfläche bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \\ \Rightarrow \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) &= Q \\ \vec{j}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \rho(\vec{r}) \omega r (\hat{z} \times \hat{r}) \\ &= \rho(\vec{r}) \omega r ((\cos(\Theta)\hat{r} - \sin(\Theta)\hat{\Theta}) \times \hat{r}) \\ &= \rho(\vec{r}) \omega r ((\cos(\Theta)\hat{r} - \sin(\Theta)\hat{\Theta}) \times \hat{r}) \\ &= \rho(\vec{r}) \omega r \sin(\Theta) \hat{\phi} \\ &= \frac{Q\omega r \sin(\Theta)}{4\pi R^2} \delta(r - R) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Das magnetische Moment ist damit :

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \frac{Q\omega r^2 \sin(\Theta)}{4\pi R^2} \delta(r - R) \hat{r} \times \hat{\varphi} \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \frac{Q\omega r^2 \sin(\Theta)}{4\pi R^2} \delta(r - R) \hat{\Theta} \\
 &= -\frac{Q\omega}{8\pi R^2} \int dr r^4 \delta(r - R) \int_0^\pi d\Theta \sin(\Theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{\Theta} \\
 &= -\frac{Q\omega R^2}{8\pi} \int_0^\pi d\Theta \sin(\Theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \cos(\Theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\Theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\Theta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{Q\omega R^2}{4} \int_0^\pi d\Theta \sin^2(\Theta) \hat{z} = \frac{Q\omega R^2}{4} \int_{-1}^1 d\cos(\Theta) (1 - \cos^2(\Theta)) \hat{z} \\
 &= \frac{QR^2}{4} \vec{\omega} \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{QR^2}{3} \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

(b) Nun bestimmen wir das Vektorpotential:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r' - R) \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R^2} \vec{\omega} \times \int d^3\vec{r}' \delta(r' - R) \frac{\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R^2} \vec{\omega} \times \int_{-1}^1 d\cos(\Theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \int dr' \delta(r' - R) \frac{r'^3}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\Theta')}} \hat{r}' \\
&= \frac{\mu_0 Q}{16\pi^2 R^2} \vec{\omega} \times \int_{-1}^1 d\cos(\Theta') \frac{R^3}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\Theta')}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{pmatrix} \sin(\Theta') \cos(\varphi') \\ \sin(\Theta') \sin(\varphi') \\ \cos(\Theta') \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mu_0 Q}{8\pi R^2} \vec{\omega} \times \int_{-1}^1 d\cos(\Theta') \frac{\cos(\Theta') R^3}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\Theta')}} \underbrace{\hat{z}}_{\equiv \hat{r}} \\
&= \frac{\mu_0 QR}{8\pi} \vec{\omega} \times \hat{r} \int_{-1}^1 dx \frac{x}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}} \\
&\stackrel{P.I.}{=} \frac{\mu_0 QR}{8\pi} \vec{\omega} \times \hat{r} \left( \left[ \frac{2}{-2rR} x \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \frac{2}{-2rR} \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx} \right) \\
&= \frac{\mu_0 QR}{8\pi} \vec{\omega} \times \hat{r} \left[ \frac{-1}{rR} x \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx} - \frac{1}{3r^2 R^2} \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx}^3 \right]_{-1}^1 \\
&= -\frac{\mu_0 Q}{8\pi r} \vec{\omega} \times \hat{r} \left[ \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRx} \left( x + \frac{r^2 + R^2 - 2rRx}{3rR} \right) \right]_{-1}^1 \\
&= -\frac{\mu_0 Q}{8\pi r} \vec{\omega} \times \hat{r} \left[ \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \left( 1 + \frac{r^2 + R^2 - 2rR}{3rR} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} \left( -1 + \frac{r^2 + R^2 + 2rR}{3rR} \right) \right] \\
&= -\frac{\mu_0 Q}{8\pi r} \vec{\omega} \times \hat{r} \left[ |r - R| \frac{r^2 + R^2 + rR}{3rR} - |r + R| \frac{r^2 + R^2 - rR}{3rR} \right] \\
&= -\frac{\mu_0 Q}{24\pi r^2 R} \vec{\omega} \times \hat{r} \left[ (r^2 + R^2)(|r - R| - |r + R|) + rR(|r - R| + |r + R|) \right] \\
&= -\frac{\mu_0 Q}{24\pi r^2 R} \vec{\omega} \times \hat{r} \begin{cases} (r^2 + R^2)(-2r) + rR(2R) & \text{für } r \leq R \\ (r^2 + R^2)(-2R) + rR(2r) & \text{für } r > R \end{cases} \\
&= \frac{\mu_0 Q}{12\pi r^2 R} \vec{\omega} \times \hat{r} \begin{cases} r^3 & \text{für } r \leq R \\ R^3 & \text{für } r > R \end{cases} \\
&= \frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \vec{\omega} \times \vec{r} \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^3}{r^3} & \text{für } r > R \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit  $r_{<} = \min(r, R)$  lässt sich das Potential schreiben als

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \frac{r_{\leq}^3}{r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Zunächst betrachten wir  $r \leq R$  um das B-feld zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \underbrace{\frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \vec{\omega}}_{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &\stackrel{bac-cab}{=} \vec{\Omega} \cdot (\nabla \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\nabla \cdot \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \cdot (\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \cdot \vec{r} \\ &= \vec{\Omega} \cdot 3 - \Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{r} = (3 - 1)\vec{\Omega} = 2\vec{\Omega} \\ &= \frac{\mu_0 Q}{6\pi R} \vec{\omega} \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir das B-Feld für  $r > R$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{QR^2}{3} \vec{\omega} \times \vec{r} \frac{1}{r^3} \\ &\stackrel{a)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &\stackrel{bac-cab}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{m} \cdot \left( \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\nabla \cdot \vec{m}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{m} \cdot \left( \frac{\nabla \cdot \vec{r}}{r^3} + \vec{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} \right) - m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{r^3} \hat{x}_j \right] \\ &\stackrel{\text{Aufg. 1}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \vec{m} \cdot \left( \frac{3}{r^3} - 3\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} \right) - m_i \frac{\delta_{ij} r^3 - 3x_j x_i r^2}{r^6} \hat{x}_j \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\vec{m}}{r^3} + 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right] \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade einem Dipolfeld.

- (c) Wir wählen nun wieder  $\vec{\omega}$  in z-Richtung ( $\vec{m} \rightarrow m\hat{z}$ ). Damit wird das B-Feld zu

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [-\hat{z} + 3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r}] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [-(\cos(\Theta)\hat{r} - \sin(\Theta)\hat{\Theta}) + 3((\cos(\Theta)\hat{r} - \sin(\Theta)\hat{\Theta}) \cdot \hat{r})\hat{r}] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2\cos(\Theta)\hat{r} + \sin(\Theta)\hat{\Theta}] \end{aligned}$$



Die Feldenergie kann damit bestimmt werden zu:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{mag}} &= \frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r} \vec{B}^2 \\
 &= \frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r} \frac{\mu_0^2 m^2}{(4\pi r^3)^2} \left[ 2 \cos(\Theta) \hat{r} + \sin(\Theta) \hat{\Theta} \right]^2 \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{32\pi^2} \int d^3\vec{r} \frac{1}{r^6} \left[ 4 \cos^2(\Theta) + \sin^2(\Theta) \right] \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{32\pi^2} \int d^3\vec{r} \frac{1}{r^6} \left[ 3 \cos^2(\Theta) + 1 \right] \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{32\pi^2} \int_{-1}^1 d \cos(\Theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^\infty dr \frac{1}{r^4} \left[ 3 \cos^2(\Theta) + 1 \right] \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{16 \cdot 3\pi R^3} \int_{-1}^1 d \cos(\Theta) \left[ 3 \cos^2(\Theta) + 1 \right] \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{16 \cdot 3\pi R^3} \int_{-1}^1 d \cos(\Theta) \left[ \cos^3(\Theta) + \cos(\Theta) \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{\mu_0 m^2}{12\pi R^3}
 \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir das magnetische Moment mit Hilfe der Horizontalkomponente des magnetischen Feldes in Karlsruhe. Die horizontale Komponente des Magnetfeldes ist durch die Komponente in  $\hat{\Theta}$ -Richtung  $B_\Theta$  gegeben. Desweiteren ist die geographische Breite gegeben durch  $\beta = \frac{\pi}{2} - \Theta$ . Auf der Erdoberfläche mit Radius  $R_E$  gilt daher für das magnetische Moment:

$$\begin{aligned}
 B_{\Theta, \text{KA}} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R_E^3} \sin(\Theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R_E^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi R_E^3} \cos(\beta) \\
 \Rightarrow m &= \frac{4\pi R_E^3}{\mu_0 \cos(\beta)} B_{\Theta, \text{KA}}
 \end{aligned}$$

Somit ist die Energie der Erde gegeben durch

$$\begin{aligned}
 U_{\text{mag}} &= \frac{\mu_0}{12\pi R_E^3} \frac{4^2 \pi^2 R_E^6}{\mu_0^2 \cos^2(\beta)} B_{\Theta, \text{KA}}^2 \\
 &= \frac{4\pi R_E^3}{3\mu_0 \cos^2(\beta)} B_{\Theta, \text{KA}}^2
 \end{aligned}$$

Die mechanische Rotationsenergie einer Erde (Kugel) ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} J_{\text{Erde}} \omega^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2}{5} M R_E^2 \left( \frac{2\pi}{\text{day}} \right)^2 \\
 &= \frac{4\pi^2}{5} M R_E^2 \frac{1}{(86400\text{s})^2}
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Einheiten:

$$B_{\Theta,KA} = 20\mu\text{T} = 20 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{As}^2}$$

$$\beta = 49^\circ$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0} = 10^7 \frac{\text{A}^2\text{s}^2}{\text{kg m}}$$

$$R_E = 6.4 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

$$\Rightarrow U_{\text{mech}} \approx 2.60 \cdot 10^{29} \text{J}$$

$$\Rightarrow U_{\text{mag}} \approx 8.12 \cdot 10^{17} \text{J}$$

$$\Rightarrow U_{\text{mag}}/U_{\text{mech}} \approx 3.12 \cdot 10^{-12}$$

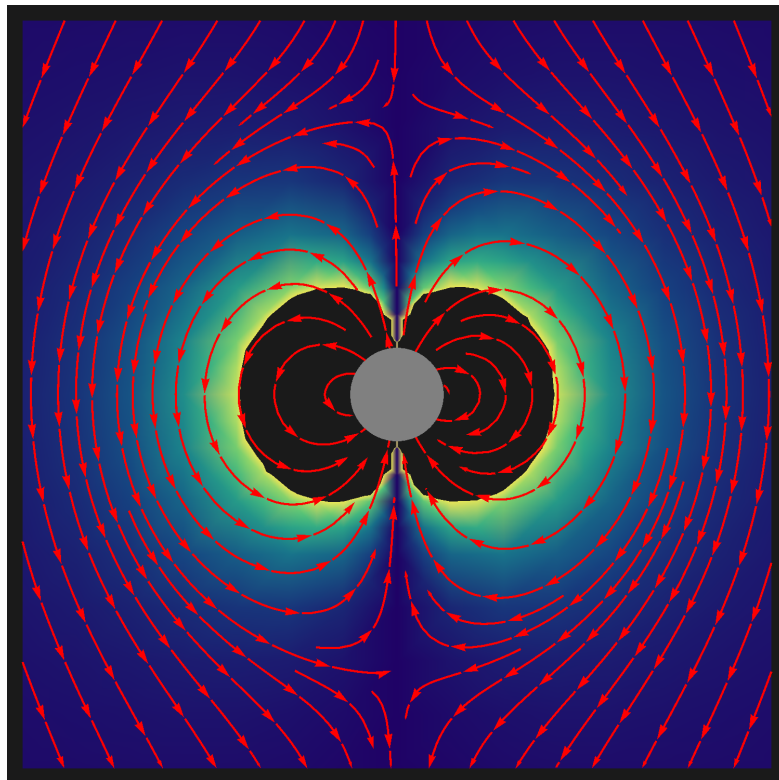


Abbildung 15: Außenfeld: x-z-Ansicht des Absolutwerts des Vektorpotentials und des Magnetfelds der rotierenden Kugel. Vielen Dank an Marcel Krause.

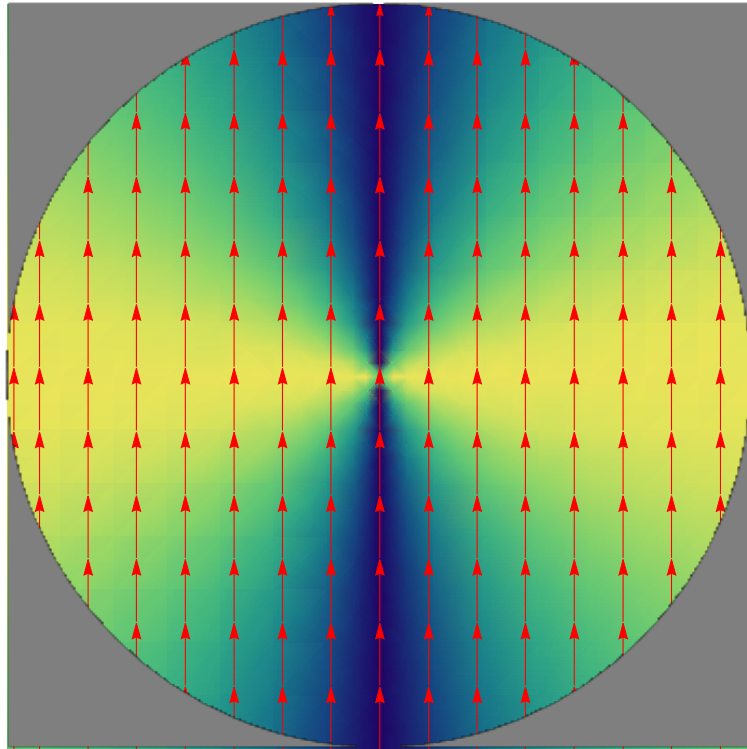


Abbildung 16: Innenfeld:  $x$ - $z$ -Ansicht des Absolutwerts des Vektorpotentials und des Magnetfelds der rotierenden Kugel. Vielen Dank an Marcel Krause.