Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. F. Staub

Übungsblatt 1

Ausgabe: Mi, 17.10.2018 – Besprechung: Fr, 26.10.2018

Aufgabe 1: Eigenschaften der δ-Distributionen

Die δ-Distributionen hat folgende Eigenschaften: $\int dx f(x)\delta(x-a) = f(a)$

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{1}$$

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Zeigen Sie:

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|}\ , \tag{2}$$

wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1, \dots, x_N$ besitzt.

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Berechnen Sie die "Ableitung der δ-Funktion"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) \tag{3}$$

Aufgabe 2: Gradient, Divergenz und Rotation

Es sei $\vec{x} = (x,y,z)^T$ der Ortsvektor, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor und $r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi$ für ein Skalarfeld $\varphi(\vec{x})$ mit

$$i)\quad \varphi(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x}$$
$$ii)\quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{r}$$

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\vec{v}$ der folgenden Vektorfelder $\vec{v}(\vec{x})$:

$$i)\quad \vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$$
$$ii)\quad \vec{v}(\vec{x}) = r\vec{a}$$
$$iii)\quad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r}$$

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ der folgenden Vektorfelder $\vec{v}(\vec{x})$:

$$
\begin{aligned}
i) \quad & \vec{v}(\vec{x}) = \vec{x} \\
ii) \quad & \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz + 12xy \\ xz - 8yz^2 + 6x^2 \\ xy - 12y^2z^2 \end{pmatrix} \\
iii) \quad & \vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{a} \times \vec{x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Identitäten der Vektoranalysis

Es sei $\varphi(\vec{x})$ ein Skalarfeld und $\vec{A}(\vec{x})$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad})\,\varphi = 0$

(b) $\boxed{1\text{ P}}$ $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$

(c) $\boxed{1\text{ P}}$ $\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad}\varphi$

(d) $\boxed{1\text{ P}}$ $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Aufgabe 4: Abschätzung der Fläche Deutschlands

In dieser Aufgabe soll die Fläche von Deutschland mit Hilfe eines Oberflächenintegrals abgeschätzt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Geben Sie das Oberflächenelement einer Kugel an.

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass die Grenzen von Deutschland durch die folgenden Orte und entlang der entsprechenden Breiten- bzw. Längengrade verlaufen:

nördlichster Punkt	Sylt	55° N
südlichster Punkt	Obersdorf	47° N
östlichster Punkt	Görlitz	15° O
westlichster Punkt	Aachen	6° O

Schätzen Sie ab, um welchen Faktor α sich diese Fläche von der wirklichen Fläche Deutschlands unterscheidet. Stellen Sie anschliessend das zugehörige Oberflächenintegral inklusive des Korrekturfaktors α auf.

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Berechnen Sie das Integral und setzen Sie den Erdradius $R_{\text{Erde}} = 6000$ km sowie den von Ihnen geschätzten Wert für α ein. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der tatsächlichen Fläche Deutschlands.