

# Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. F. Staub

## Übungsblatt 11

Ausgabe: Mi, 16.01.2019 – Besprechung: Fr, 25.01.2019

### Aufgabe 1: Interferenz ebener Wellen

4 P

Betrachten Sie zwei ebene Wellen  $\Psi_j$  mit gleicher Frequenz  $\omega$ , aber unterschiedlicher Amplitude  $\vec{A}_j$  und unterschiedlichem Wellenvektor  $\vec{k}_j$  ( $j = 1, 2$ ):

$$\Psi_1 = \vec{A}_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \vec{x})} \quad (1)$$

$$\Psi_2 = \vec{A}_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{x})} \quad (2)$$

Wir nehmen an, dass beide Wellen sich kohärent überlagern.

- 1 P Berechnen Sie die Intensität  $I = |\Psi_1 + \Psi_2|^2$  der beiden Wellen.
- 1 P Wie würde die Intensität der beiden Wellen lauten, wenn diese nicht kohärent wären?
- 1 P Wie lautet die Bedingung für  $k_1, k_2$ , so dass die Intensität minimal (maximal) wird?
- 1 P Unter welcher Bedingung können sich die beiden Wellen exakt aufheben?

### Aufgabe 2: Gaußsches Wellenpaket

14 P

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi_b(x) = [\pi b^2]^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right], \quad b > 0.$$

- 1 P Zeichnen Sie  $\psi_b(x)$  für  $b = 1$  cm und  $b = 5$  cm. Berechnen Sie  $\langle \psi | \psi \rangle$ .
- 2 P Berechnen Sie  $\langle \psi_b | X | \psi_b \rangle$  und die Ortsunschärfe  $\Delta X$  im Zustand  $\psi_b$ .

- (c) 3 P Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung sind definiert durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\psi}(p) e^{i\frac{px}{\hbar}}, \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}}. \quad (1)$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation von  $\psi_b(x)$ . Was fällt Ihnen auf?

- (d) 3 P Berechnen Sie  $\langle \psi_b | P | \psi_b \rangle$  für den Impulsoperator  $P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ . Berechnen Sie auch die Impulsunschärfe  $\Delta P$  und das Unschärfeprodukt  $\Delta X \Delta P$  im Zustand  $\psi_b$ .

(*Hinweis:* Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).)

- (e) 3 P Die kinetische Energie eines (nichtrelativistischen) Elektrons mit Masse  $m$  wird durch den Operator  $H_{\text{kin}} = \frac{P^2}{2m}$  beschrieben. Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie,  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle \psi_b | H_{\text{kin}} | \psi_b \rangle$ . Berechnen Sie die Unschärfe der kinetischen Energie,  $\Delta E_{\text{kin}} = [\langle \psi_b | H^2 | \psi_b \rangle - \langle E_{\text{kin}} \rangle^2]^{1/2}$ , im Zustand  $\psi_b$ . Was passiert mit  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  und  $\Delta E_{\text{kin}}$ , wenn wir das Elektron immer weiter lokalisieren, also  $b$  immer kleiner wählen?

- (f) 2 P Die nichtrelativistische Näherung bricht ungefähr dann zusammen, wenn  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = mc^2$  ist. Geben Sie den Wert  $b_{\text{krit}}$  an, bei dem dies der Fall ist. Aus der relativistischen Beziehung

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \dots$$

verschaffen wir uns den Operator der *relativistischen Korrektur*,  $H_{\text{kin}}^{\text{rel}} = -P^4/(8m^3 c^2)$ . Berechnen Sie  $\langle E_{\text{kin}}^{\text{rel}} \rangle = \langle \psi_b | H_{\text{kin}}^{\text{rel}} | \psi_b \rangle$  und zeichnen Sie (im selben Koordinatensystem)  $\langle E_{\text{kin}} \rangle/(mc^2)$  und  $\langle E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}}^{\text{rel}} \rangle/(mc^2)$  als Funktion von  $b/b_{\text{krit}}$ .

*Hinweis:* Zur Berechnung von Integralen der Form  $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2}$  mit  $\alpha > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  berechnen Sie zunächst  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}$  und differenzieren Sie dann nach  $\alpha$ .

### Aufgabe 3: Entartung von Energieniveaus

3 P

Zeigen Sie, dass bei einer 1-dimensionalen stationären Schrödingergleichung mit einem Potential  $V(x)$  kein Energieniveau des diskreten Spektrums entartet ist. Wenn also  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  Eigenfunktionen zu derselben Energie  $E$  sind, dann müssen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  linear abhängig sein.

*Hinweis:* Zeigen Sie:  $\Psi_1'' \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2'' = 0$  und integrieren Sie diese Gleichung zweimal. Die erste Integrationskonstante lässt sich über die Randbedingungen bestimmen.