Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. F. Staub

Übungsblatt 2

Ausgabe: Mi, 24.10.2018 – Besprechung: Fr, 02.11.2018

Aufgabe 1: Gradient, Divergenz und Rotation — 3 P

Sei $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$ und f eine stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie

(a) 1 P

$$\vec{\nabla} f(r) \tag{1}$$

(b) 1 P

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f(r) \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \tag{2}$$

(c) 1 P

$$\vec{\nabla} \times \left(f(r) \frac{\vec{r}}{r} \right) \tag{3}$$

Aufgabe 2: Integralsätze von Stokes und Gauß — 12 P

(a) 5 P Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (Lx^2 - y^3, -xy^2, xyz)^T$. Berechnen Sie für ein Quadrat mit der Seitenlänge $2L$ um den Ursprung in der x-y-Ebene beide Seiten des Satzes von Stokes

$$\int_A \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{C(A)} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(b) 2 P Teilen Sie nun das Quadrat entlang der x-Achse in zwei Rechtecke und berechnen Sie das Wegintegral (rechte Seite des Satzes von Stokes) für beide Rechtecke.

(c) 5 P Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} = (4x, -2y, z^2/h)^T$. Verifizieren Sie an diesem Beispiel die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für einen Zylinder mit der Höhe h und dem Radius R.

Aufgabe 3: Wegintegrale $\boxed{\textbf{8 P}}$

Das skalare elektrische Potential einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r'})$ ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \,.$$

Betrachten Sie das Zentralpotential einer Punktladung Q im Ursprung, d.h.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

In diesem Potential wird eine Punktladung q von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 bewegt. P_1 und P_2 liegen auf einem Kreis um die Ladung Q. Berechnen Sie für zwei verschiedene Wege im Kraftfeld die dabei verrichtete Arbeit.

(a) $\boxed{5\text{ P}}$ Der Weg wird geradlinig von P_1 nach P_2 zurückgelegt.

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Der Weg wird dem Kreisstück von P_1 nach P_2 folgend zurückgelegt.