Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. F. Staub

Übungsblatt 8

Ausgabe: Mi, 5.12.2018 – Besprechung: Fr, 14.12.2018

Aufgabe 1: Lorentzkraft $\boxed{\text{6 P}}$

Ein positiv geladenes Teilchen mit Masse m und Ladung q ruht im Koordinatenursprung. Nun sollen die magnetische Flussdichte $\vec{B} = B\,\hat{e}_x$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E\,\hat{e}_z$ angelegt werden.

(a) $\boxed{\text{3 P}}$ Wie sieht die Teilchenbahn qualitativ aus? Stelle die Bewegungsgleichungen auf und vereinfache sie mit der Zyklotronfrequenz $\omega = |q||\vec{B}|/m$. Was beschreibt diese?

(b) $\boxed{\text{3 P}}$ Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 2: Rotierende Christbaumkugel $\boxed{\text{11 P}}$

Eine Christbaumkugel vom Radius R trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung Q. Sie rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$ um ihren Durchmesser.

(a) $\boxed{\text{2 P}}$ Wie lautet die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel?

(b) $\boxed{\text{4 P}}$ Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ und das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\, d^3r$$

der Kugel.

(c) $\boxed{\text{5 P}}$ Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dabei die Identität

$$\int \frac{\delta(r' - R)\,\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d^3r' = \frac{4\pi R}{3r^2}\, r_<^3\, \vec{e}_r,$$

mit $r_< = \min(r, R) = \begin{cases} r, & \text{falls}\, r \leq R \\ R, & \text{falls}\, r > R \end{cases}.$

Aufgabe 3: Wellengleichung $\boxed{9\ \text{P}}$

Fehlen Ströme und Ladungen, dann erfüllen in der Lorentz-Eichung skalares Potential $\varphi(\vec{r},t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ im Vakuum die homogene Wellengleichung

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = 0,$$
$$\Box\vec{A}(\vec{r},t) = 0,$$

wobei $\Box = \Delta - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$.

(a) $\boxed{1\ \text{P}}$ Zeigen Sie, dass elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r},t)$ und magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$ dieselbe Differenzialgleichung erfüllen.

(b) $\boxed{4\ \text{P}}$ Die Ausdrücke

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t),$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t),$$

lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und $\vec{k}$? Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$!

(c) $\boxed{2\ \text{P}}$ Wie groß ist die Energiestromdichte (Energiefluss) $\vec{S} = 1/\mu_0\, \vec{E} \times \vec{B}$ parallel bzw. senkrecht zu $\vec{k}$?

(d) $\boxed{2\ \text{P}}$ Wie groß ist die Feldenergiedichte $w(\vec{r},t) = 1/2\, \epsilon_0\, \vec{E}^2(\vec{r},t) + 1/(2\mu_0)\, \vec{B}^2(\vec{r},t)$?