# Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. F. Staub

## Übungsblatt 9

Ausgabe: Mi, 12.12.2018 – Besprechung: Fr, 11.01.2019

### Aufgabe 1: Gruppeneigenschaften der speziellen Lorentz-Transformationen

Betrachten Sie die Menge aller speziellen Lorentz-Transformationen, die einen Boost in $x$-Richtung beschreiben, d.h. $\{\Lambda(\alpha),\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha$ die Rapidität bezeichnet.

(a) $\boxed{\text{2 P}}$ Zeigen Sie, dass diese Menge bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) $\boxed{\text{2 P}}$ Betrachten Sie die Verknüpfung zweier Boosts in $x$-Richtung. Wie addieren sich die Rapiditäten? Wie addieren sich die Geschwindigkeiten? Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

(c) $\boxed{\text{2 P}}$ Zeigen Sie durch eine geeignete Entwicklung, dass im Grenzfall $v/c \ll 1$
   (i) der Lorentzboost $\Lambda(\alpha)$ in die entsprechende Galilei-Transformation übergeht.
   (ii) das in b) gefundene Additionstheorem für Geschwindigkeiten in das klassische Additionstheorem für Geschwindigkeiten übergeht.

### Aufgabe 2: Luftschauer $\boxed{\text{6 P}}$

Etwa 85% der kosmischen Strahlung besteht aus schnellen Protonen $p^+$, die in den oberen Schichten der Erdatmosphäre auf die Protonen und Neutronen $n$ in den Stickstoff- und Sauerstoffatomen treffen. Dabei werden über die Reaktion $p^+ + p^+ \to p^+ + n + \pi^+$, $p^+ + n \to n + n + \pi^+$ geladene Pionen $\pi^+$ erzeugt. Ein Pion zerfällt in ein Myon $\mu^+$ und ein Neutrino $\nu_\mu$: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

(a) $\boxed{1\ \text{P}}$ Da das erzeugte Pion aufgrund der hohen Anfangsenergie des Protons aus der kosmischen Strahlung nicht in Ruhe ist, hat auch das Zerfallsmyon eine hohe kinetische Energie. Nehmen Sie für die folgenden Betrachtungen an, dass sich die Myonen mit einer Geschwindigkeit von $0,995$ c in Richtung Erdoberfläche bewegen. Die Myonen zerfallen mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 1,52\ \mu$s. Wie groß ist die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke $s$ nach klassischer Rechnung?

(b) $\boxed{1\ \text{P}}$ Nehmen Sie an, dass in 20 km Höhe über der Erdoberfläche ca. $10^{15}$ Myonen gebildet werden. Wie viele der Myonen treffen nach klassischer Rechnung auf der Erdoberfläche auf?

(c) $\boxed{2\ \text{P}}$ Bestimmen Sie mit Hilfe einer relativistischen Rechnung im Bezugsystem Erde die tatsächliche Anzahl der auf der Erdoberfläche auftreffenden Myonen.

(d) $\boxed{2\ \text{P}}$ Wie erklärt ein Beobachter, der sich mit den Myonen mitbewegt, den gesamten Vorgang? Bestätigen Sie auch in diesem System die Anzahl der auf der Erde auftreffenden Myonen.

## Aufgabe 3: Zwillingsparadoxon $\boxed{12\ \text{P}}$

Ein Zwilling unternimmt eine Reise zum Zentrum der Milchstraße (Entfernung etwa 26000 Lichtjahre). Dazu steigt er in eine Rakete (System $K'$), die zunächst mit der konstanten Beschleunigung $a' = g = 10\frac{m}{s}$ Fahrt aufnimmt. Nach der Hälfte der Reise dreht der Zwilling die Triebwerke um und die Rakete wird mit konstanter Beschleunigung $-a'$ gebremst. Der Rückflug findet auf dieselbe Art und Weise statt. Der andere Zwilling bleibt zu Hause und kann als ruhend (System $K$) angenommen werden. Berechnet werden sollen nun die Zeiten $T'$ und $T$, die während der Reise für den Reisenden bzw. für den zu Hause gebliebenen Zwilling vergehen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) $\boxed{3\ \text{P}}$ In der Zeit $dt'$ ändert sich, vom momentanen Ruhesystem der Rakete aus betrachtet, die Geschwindigkeit der Rakete um $dv' = a'dt'$. Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für Geschwindigkeiten, dass die zugehörige Geschwindigkeitsänderung im System $K$

$$dv = a'dt'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

beträgt.

(b) $\boxed{2\ \text{P}}$ Bestimmen Sie durch Separation der Variablen daraus die Geschwindigkeit $v$ als Funktion von $t'$.

(c) $\boxed{4\ \text{P}}$ Ausgehend von

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}dt'$$

kann nun der funktionale Zusammenhang von $t'$ und $t$ bestimmt werden. Geben Sie damit die Geschwindigkeit $v$ als Funktion von $t$ an.

(d) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie durch Integration die zurückgelegte Stecke $s$ als Funktion von $t$. Bestimmen Sie daraus $t$ und $t'$ jeweils als Funktion von $s$. Was ergibt sich für die Gesamtreisezeiten $T$ und $T'$? Treffen sich die Zwillinge wieder?