Theoretische Teilchenphysik II

Wintersemester 2019/2020

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

gehalten von

Milada Margarete Mühlleitner

Inhaltsverzeichnis

1 Bemerkungen **1**
1.1 Literatur . . . 1

2 Eichsymmetrien **3**
2.1 Kopplung an ein Photon . . . 3
2.2 Nicht-abelsche Eichgruppen . . . 5
2.3 Die Matrizen der $\boldsymbol{SU(N)}$ . . . 5
2.4 Darstellung nicht-abelscher Gruppen . . . 7
2.5 Nichtabelsche Eichtransformationen . . . 8
2.6 Die QCD Lagrangedichte . . . 9
2.7 Chirale Eichtheorien . . . 10
2.8 Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen . . . 11
2.8.1 Gruppen . . . 11
2.8.2 Algebra . . . 11
2.8.3 Clifford-Algebren . . . 12
2.8.4 Liealgebren . . . 12

Kapitel 1

Bemerkungen

In den einzelnen Kapiteln der Vorlesung gibt es am Ende Kapitel, die mit **Addendum** bezeichnet sind. Diese enthalten Zusatzinformationen für den interessierten Leser, sind aber nicht verpflichtend für die Übungen.

Kapitel, die aus Zeitgründen in den einzelnen Vorlesungen nicht behandelt werden, werden auf der Webseite explizit genannt. Auf sie kann verzichtet werden. Sie verbleiben im Vorlesungsskript lediglich als zusätzliche Information.

Die Vorlesung folgt keinem bestimmten Buch. Die angegebene Literatur ist hilfreich, den Sachverhalt zu vertiefen bzw. nochmals auf andere Weise dargestellt zu sehen oder aber zusätzliche Hintergrundinformationen zu erhalten, die in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht alle behandelt werden können.

1.1 Literatur

- M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995)
- T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press)
- C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill)
- P. Ramon, *Field Theory: a modern primer*
- M. Böhm, A. Denner and H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Teubner, 2001)
- Chris Quigg *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions* (Benjamin/Cummings, 1983)
- G. Dissertori, I. Knowles, M. Schmeling, *Quantum Chromodynamics* (Oxford University Press)
- O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics* (Springer 1990)
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (2nd ed., Cambridge University Press, 1996)

- R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and Collider Physics* (Cambridge University Press 1996)
- P. H. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings)

Dabei ist Literatur (unter anderem) über Renormierung

- C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill)
- P. Ramon, *Field Theory: a modern primer*
- M. Böhm, A. Denner and H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Teubner, 2001)
- W.J.P. Beenakker, *Electroweak corrections: techniques and applications*

Und Literatur über Pfadintegrale z.B.

- Gert Roepstorff, *Path Integral Approach to Quantum Physics* (Springer)

Weitere Literatur für den interessierten Leser

- Martinus Veltman *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics* (World Scientific, 2003)
- V. D. Barger and R. J. N. Phillips, *Collider Physics* (Addison-Wesley, 1997)
- Eds. Roger Cashmore, Luciano Maiani, Jean-Pierre Revol *Prestigious Discoveries at CERN* (Springer, 2004)

Kapitel 2

Eichsymmetrien

Dirac Lagrangedichte für ein freies Fermionfeld Ψ der Masse m lautet

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \; . \tag{2.1}$$

Diese ist symmetrisch unter $U(1)$, d.h. invariant unter Transformationen

$$\Psi(x) \to \exp(-i\alpha)\Psi(x) = \Psi - i\alpha\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2) \; . \tag{2.2}$$

Und für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$,

$$\bar{\Psi}(x) \to \exp(i\alpha)\bar{\Psi}(x) \; . \tag{2.3}$$

Der mit der Symmetrie verbundene Noether-Strom lautet

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\delta \alpha} + \frac{\delta \bar{\Psi}}{\delta \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \bar{\Psi}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(-i\Psi) = \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi \; , \tag{2.4}$$

mit

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \; . \tag{2.5}$$

2.1 Kopplung an ein Photon

Bei Kopplung an ein Photon lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu \; , \tag{2.6}$$

wobei j^μ in Glg. (2.4) gegeben ist. Bei Eichtransformation des externen Photonfeldes A_μ,

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{2.7}$$

geht die Lagrangedichte über in

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu - \underbrace{qj^\mu \partial_\mu \Lambda}_{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Lambda} \; . \tag{2.8}$$

D.h $\mathcal{L}$ ist nicht eichinvariant. Die Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ müssen so geändert werden, daß die Lagrangedichte eichinvariant wird. Dies geschieht durch Einführung eines x-abhängigen Parameters α, also $\alpha = \alpha(x)$. Damit

$$i\partial_\mu \Psi \to i\exp(-i\alpha)(\partial_\mu \Psi) + (\partial_\mu \alpha)\exp(-i\alpha)\Psi \; , \tag{2.9}$$

so daß

$$\mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi \partial_\mu \alpha \ . \tag{2.10}$$

Dieser Term kanzelliert den zusätzlichen Term in Glg. (2.8) falls

$$\alpha(x) = q\Lambda(x) \ . \tag{2.11}$$

Damit lautet die vollständige Eichtransformation

$$\Psi \ \to \ \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \qquad \text{mit} \qquad U(x) = exp(-iq\Lambda(x)) \qquad (U \text{ unitär}) \tag{2.12}$$

$$\bar{\Psi} \ \to \ \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(x) \tag{2.13}$$

$$A_\mu(x) \ \to \ A'_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \ . \tag{2.14}$$

Die Lagrangedichte transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}\gamma^\mu U^{-1} i\partial_\mu (U\Psi) - q\bar{\Psi}U^{-1}\gamma^\mu \left(UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^{-1} \right) U\Psi - m\bar{\Psi}U^{-1}U\Psi \\ &= \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu (U^{-1}i(\partial_\mu U))\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu + \bar{\Psi}\gamma^\mu (i(\partial_\mu U^{-1})U)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \mathcal{L} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu (U^{-1}U)\Psi = \mathcal{L} \ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Minimale Substitution $p_\mu \to p_\mu - qA_\mu$ führt auf

$$i\partial_\mu \to i\partial_\mu - qA_\mu \equiv iD_\mu \ . \tag{2.16}$$

Dabei ist $D_\mu(x)$ die *kovariante Ableitung*. Der Begriff *kovariant* bedeutet, daß sie sich genauso wie das Feld transformiert

$$\Psi(x) \to U(x)\Psi(x) \qquad \text{und} \qquad D_\mu \Psi(x) \to U(x)(D_\mu \Psi(x)) \ . \tag{2.17}$$

Das heißt

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U\Psi \stackrel{!}{=} UD_\mu \Psi \ , \tag{2.18}$$

so daß sich die kovariante Ableitung transformiert gemäß

$$\begin{aligned} D'_\mu &= UD_\mu U^{-1} = \exp(-iq\Lambda)(\partial_\mu + iqA_\mu)\exp(iq\Lambda) = \partial_\mu + iq\partial_\mu \Lambda + iqA_\mu \\ &= \partial_\mu + iqA'_\mu \ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu iD_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{2.20}$$

offensichtlich eichinvariant.

Die kinetische Energie der Photonen ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{mit} \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ . \tag{2.21}$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ lässt sich mithilfe der kovarianten Ableitung ausdrücken. Wir wählen folgenden Ansatz für den Tensor 2. Stufe

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - iqA_\mu, \partial_\nu - iqA_\nu] = -iq[\partial_\mu, A_\nu] - iq[A_\mu, \partial_\nu] = -iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \ . \tag{2.22}$$

Damit haben wir für den Feldstärkentensor

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{q}[D^\mu, D^\nu] \ . \tag{2.23}$$

Sein Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$\frac{i}{q}[UD^\mu U^{-1}, UD^\nu U^{-1}] = \frac{i}{q}U[D^\mu, D^\nu]U^{-1} = UF^{\mu\nu}U^{-1} \ . \tag{2.24}$$

2.2 Nicht-abelsche Eichgruppen

Wir verwenden die Langrangedichte für N Diracfelder ψ_i der Masse m

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1...N} \bar{\psi}_j i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - m \sum_{j=1...N} \bar{\psi}_j \psi_j \ . \tag{2.25}$$

Diese ist symmetrisch unter $U(N)$, wobei $U(N)$ die Gruppe der unitären $N \times N$ Matrizen ist. Betrachte folgende Transformation

$$\psi_j \to \sum_{k=1...N} U_{ik}\psi_k \equiv U_{ik}\psi_k \ , \tag{2.26}$$

wobei die letzte Gleichung bedeutet, daß wir die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Das heißt, über gleiche Indizes wird summiert. Wir haben also

$$\Psi \to U\Psi \qquad \text{mit} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \ , \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} U_{1k}\psi_k \\ U_{2k}\psi_k \\ \vdots \\ U_{Nk}\psi_k \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

und

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \to \bar{\Psi}U^{-1} i\gamma^\mu \partial_\mu U\Psi - m\bar{\Psi}U^{-1}U\Psi = \mathcal{L} \ . \tag{2.28}$$

Beispiele:

- $\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$: $SU(2)$-Transformationen im Isospinraum, Proton-Neutron-Dublett.
- $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$: $SU_L(2)$, schwache Wechselwirkung auf linkshändige Fermionen.
- $\Psi = (q_1, q_2, q_3)^T$, quarks, $SU(3)_C$. Dabei ist jedes q_i $(i = 1, 2, 3)$ ein vierkomponentiger Spinor. Die Lagrangedichte ist invariant unter $SU(3)_C$-Transformationen.

2.3 Die Matrizen der $SU(N)$

Die Elemente der $SU(N)$ werden allgemein dargestellt durch

$$U = \exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) \qquad \text{mit} \qquad \theta^a \in \mathbb{R} \ . \tag{2.29}$$

Dabei sind $\lambda^a/2$ die Generatoren der Gruppe $SU(N)$. Für die $SU(2)$ sind die λ^a durch die Pauli-Matrizen σ^i $(i = 1, 2, 3)$ gegeben und θ^a ist ein 3-komponentiger Vektor. Für ein Element der Gruppe $SU(2)$ haben wir also

$$U = \exp\left(i\vec{\omega}\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \ . \tag{2.30}$$

Für ein allgemeines U gilt

$$U^\dagger = \exp\left(-i\theta^a \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^\dagger\right) \stackrel{!}{=} U^{-1} = \exp\left(-i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) . \tag{2.31}$$

Die Generatoren müssen also hermitesch sein, d.h.

$$(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a . \tag{2.32}$$

Außerdem muß für die $SU(N)$ gelten

$$\det(U) = 1 . \tag{2.33}$$

Mit

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Sp}(A)) \tag{2.34}$$

ergibt sich

$$\det\left(\exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right)\right) = \exp\left(i\theta \mathrm{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)\right) \stackrel{!}{=} 1 . \tag{2.35}$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Sp}(\lambda^a) = 0 . \tag{2.36}$$

Die Generatoren der $SU(N)$ müssen spurlos sein. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren λ^a mit $\mathrm{Sp}(\lambda^a) = 0$. Für die $SU(3)$ sind dies die Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Die Matrizen $\lambda^a/2$ sind normiert durch

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} . \tag{2.38}$$

Für die Pauli-Matrizen $(i = 1, 2, 3)$ gilt

$$\mathrm{Sp}(\sigma_i^2) = 2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Sp}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{Sp}(i\sigma_3) = 0 . \tag{2.39}$$

Multipliziert mit 1/2 bilden sie die Generatoren der $SU(2)$. Die Generatormatrizen genügen der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{\lambda^a_{ij}}{2}\frac{\lambda^a_{kl}}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) , \tag{2.40}$$

denn

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\lambda^a_{ii}}{2}\frac{\lambda^a_{kl}}{2} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{ki} - \frac{1}{2N}\delta_{ii}\delta_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\delta_{kl} = 0 . \tag{2.41}$$

2.4 Darstellung nicht-abelscher Gruppen

Sei G eine Gruppe mit den Elementen $g_1, g_2... \in G$. Eine n-dimensionale Darstellung von G ist gegeben durch die Abbildung $G \to C^{(n,n)}$, $g \to U(g)$. D.h. die Abbildung abstrakter Elemente der Gruppe auf komplexe $n \times n$ Matrizen, so daß $U(g_1 g_2) = U(g_1)U(g_2)$ gilt und damit die Gruppeneigenschaften erhalten bleiben. Ein $U \in SU(N)$ lässt sich schreiben als $U = \exp(i\theta^a T^a)$. Für die $SU(2)$ also $U = \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{J})$. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren T^a. Für die $SU(2)$ sind dies die Drehimpulsoperatoren J_i. Die $N^2 - 1$ reellen Parameter θ^a sind in der $SU(2)$ geben durch $\vec{\omega}$. Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ lautet $J_i = \sigma_i/2$ und im allgemeinen Fall $T^a = \lambda^a/2$. Die Generatoren genügen der folgenden Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \; . \tag{2.42}$$

Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(N)$-Lie-Algebra. Sie sind total antisymmetrisch und definieren $(N^2-1)(N^2-1)$-dimensionale Matrizen $T^a_{lk} \equiv -if^a_{lk} \equiv -if^{alk}$. Im Fall der $SU(2)$ haben wir

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k \; . \tag{2.43}$$

Es gilt ferner

$$\mathrm{Sp}\left(\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right]\frac{\lambda^c}{2}\right) = if^{abe}\mathrm{Sp}\left(\frac{\lambda^e}{2}\frac{\lambda^c}{2}\right) = if^{abe}\frac{1}{2}\delta^{ec} = \frac{i}{2}f^{abc} \; . \tag{2.44}$$

Die Generatoren erfüllen die Jacobi-Identität

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \; . \tag{2.45}$$

Unter Benutzung von (2.42) erhält man

$$0 = (-if^b_{cl})(-if^a_{lk}) + (-if^a_{lc})(-if^b_{lk}) + if^{abl}(-if^l_{ck}) \; . \tag{2.46}$$

Damit

$$0 = (T^b T^a)_{ck} - (T^a T^b)_{ck} + if^{abl}(T^l)_{ck} \; . \tag{2.47}$$

Damit haben wir eine $N^2 - 1$-dimensionale Darstellung der $SU(N)$ Lie-Algebra erhalten

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \; . \tag{2.48}$$

Dies ist die *adjungierte Darstellung*. Es gibt folgende $SU(N)$ Darstellungen

- $d = 1$: triviale Darstellung (Singulett).
- $d = N$: fundamentale Darstellung ($\lambda^a/2$), antifundamentale Darstellung ($-\lambda^{*a}/2$).
- $d = N^2 - 1$: adjungierte Darstellung.

2.5 Nichtabelsche Eichtransformationen

Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1\dots N} \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_i = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \qquad \text{mit} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, ..., \bar{\psi}_N)\ . \tag{2.49}$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer globalen $SU(N)$ Eichtransformation

$$\Psi \to \Psi' = \exp\left(i\theta^a T^a\right)\Psi = \left(1 + i\theta^a T^a + \mathcal{O}((\theta^a)^2)\right)\Psi = U\Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}U^{-1} \tag{2.50}$$

Die Generatoren T^a sind

$$\begin{array}{lll} \text{fundamentale Darstellung:} & (T^a)_{ij} = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} & d = N \\ \text{adjungierte Darstellung} & (T^a)_{bc} = -if^{abc} & d = N^2 - 1 \\ \text{triviale Darstellung} & T^a = 0 \Leftrightarrow U(\theta) = 1\ . & \end{array} \tag{2.51}$$

Betrachten wir nun lokale Symmetrien, also $\theta^a = \theta^a(x)$. Die Transformation von Ψ sei $\Psi' = U\Psi$. Wir führen eine kovariante Ableitung ein,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igT^a A^a_\mu\ . \tag{2.52}$$

Die T^a können verschieden sein, aber A^a_μ ist identisch in allen D_μ. Beispiel Supersymmetrie (SUSY)

$$\begin{array}{lll} \text{squark, quark} & T^a = \frac{\lambda^a}{2} & (d = N) \\ \text{gluino} & (T^a)_{bc} = -if^{abc} & (d = N^2 - 1) \end{array} \tag{2.53}$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich genauso wie Ψ, also $(D_\mu\Psi)' = U(D_\mu\Psi)$. Damit

$$(D_\mu\Psi)' = D'_\mu\Psi' = D'_\mu U\Psi \Rightarrow D'_\mu U = UD_\mu \tag{2.54}$$

Ist erfüllt wenn

$$\partial_\mu - igA'_\mu \ = \ D'_\mu = UD_\mu U^{-1} = U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} = UU^{-1}\partial_\mu + U(\partial_\mu U^{-1}) - igUA_\mu U^{-1} \Rightarrow \tag{2.55}$$

$$A'_\mu \ = \ \frac{i}{g}U(\partial_\mu U^{-1}) + UA_\mu U^{-1}\ . \tag{2.56}$$

Wichtig: A'^a_μ ist unabhängig von der Darstellung U. Mit infinitesimalem

$$U = \exp(iT^a\theta^a) = 1 + iT^a\theta^a + \mathcal{O}(\theta^{a2}) \tag{2.57}$$

haben wir

$$\begin{aligned} A'_\mu \ &= \ A'^b_\mu T^b = \frac{1}{g}U(-i)T^a\left(\partial_\mu\theta^a\right)U^{-1} + \underbrace{(1 + i\theta^a T^a)A^c_\mu T^c(1 - i\theta^b T^b)}_{A^c_\mu T^c + iA^c_\mu \underbrace{(T^a T^c - T^c T^a)}_{if^{acb}T^b}\theta^a} \\ &= \ T^b\,\underbrace{(\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^b + A^b_\mu + i(-if^{abc})\theta^a A^c_\mu)}_{A'^b_\mu}\ . \end{aligned} \tag{2.58}$$

Der Feldstärketensor sei definiert durch $F^{\mu\nu} \sim [D^\mu, D^\nu]$. Betrachte den Kommutator

$$\begin{aligned}
[D^\mu, D^\nu] &= [\partial_\mu - igT^a A^a_\mu, \partial_\nu - igT^b A^b_\nu] = -igT^b \partial_\mu A^b_\nu - igT^a(-\partial_\nu A^a_\mu) + (-ig)^2 A^a_\mu A^b_\nu \underbrace{[T^a, T^b]}_{if^{abc}T^c} \\
&= -igT^a \underbrace{(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g \underbrace{f^{bca}}_{f^{abc}} A^b_\mu A^c_\nu)}_{=:F^a_{\mu\nu}} = -igT^a F^a_{\mu\nu} = -igF_{\mu\nu} \, . \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

Die $F^a_{\mu\nu}$ sind unabhängig von der Darstellung der T^a. Wir haben für das Transformationsverhalten

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D'^\mu, D'^\nu] = \frac{i}{g}[UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UF_{\mu\nu}U^{-1} \text{ homogene Transformation} \qquad (2.60)$$

Und mit Glg. (2.58)

$$(F^a_{\mu\nu})' = F^a_{\mu\nu} + i(-if^{bac})\theta^b F^c_{\mu\nu} + ... \qquad (2.61)$$

Ferner folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} &= 2\mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \left(= 2\mathrm{Sp}(F^{a\mu\nu} T^a F^b_{\mu\nu} T^b) = 2F^{a\mu\nu} F^b_{\mu\nu} \underbrace{\mathrm{Sp}(T^a T^b)}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = F^{\mu\nu a} F^a_{\mu\nu} \right) \\
& \quad \text{ist eichinvariant.} \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

Damit haben wir für die kinetische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{kin,A} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \, . \qquad (2.63)$$

2.6 Die QCD Lagrangedichte

Beispiel: Die Quantenchromodynamik (QCD) ist invariant unter der Farb-$SU(3)$. Die 6 Quarkfelder tragen Farbladung und befinden sich in der fundamentalen Darstellung

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \\ \psi_{q3} \end{pmatrix} \qquad q = u, d, c, s, t, b \, . \qquad (2.64)$$

Sie bilden Tripletts. Die 8 Gluonen G^μ befinden sich in der adjungierten Darstellung. Die QCD Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G^a_{\mu\nu} + \sum_{q=1...6} \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi_q \, , \qquad (2.65)$$

mit

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + gf^{abc} G^b_\mu G^c_\nu \, . \qquad (2.66)$$

Die Quarkmassen haben die Werte

$$m_u \approx 1.7...3.1 \text{ MeV} \qquad m_d \approx 4.1...5.7 \text{ MeV} \qquad m_s \approx 100 \text{ MeV} \qquad (2.67)$$

$$m_c \approx 1.29 \text{ GeV} \qquad m_b \approx 4.19 \text{ GeV} \qquad m_t \approx 173 \text{ GeV} \, . \qquad (2.68)$$

2.7 Chirale Eichtheorien

Betrachte

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \ . \tag{2.69}$$

In der chiralen Darstellung sind die 4×4 γ-Matrizen gegeben durch

$$\gamma^\mu = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} , \tag{2.71}$$

wobei σ_i $(i = 1, 2, 3)$ die Pauli-Matrizen sind. Mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = (\chi^\dagger, \varphi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \tag{2.72}$$

ergibt sich

$$\bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi = i(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\mu \chi \\ D_\mu \varphi \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sigma_-^\mu D_\mu \varphi \\ \sigma_+^\mu D_\mu \chi \end{pmatrix}} = \varphi^\dagger i\sigma_-^\mu D_\mu \varphi + \chi^\dagger i \sigma_+^\mu D_\mu \chi \ . \tag{2.73}$$

Die Eichwechselwirkung gilt unabhängig für

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi \quad \text{und} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi \ . \tag{2.74}$$

Die Ψ_L und Ψ_R können unterschiedliche Eichdarstellungen haben. Aber

$$m\bar{\Psi}\Psi = m(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = m(\varphi^\dagger \chi + \chi^\dagger \varphi) = m(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) \ . \tag{2.75}$$

Der Massenterm mischt Ψ_L und Ψ_R. Daraus folgt *Symmetriebrechung* falls Ψ_L und Ψ_R unterschiedliche Darstellungen haben.

Wie sieht es mit einem Massenterm für Eichbosonen aus? Betrachte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underbrace{F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu}}_{\text{eichinvariant}} + \frac{m^2}{2} \underbrace{A^{a\mu} A^a_\mu}_{\text{nicht eichinvariant}} \ . \tag{2.76}$$

Zum Beispiel für die $U(1)$

$$(A_\mu A^\mu)' = (A_\mu + \partial_\mu \theta)(A^\mu + \partial^\mu \theta) = A_\mu A^\mu + 2A_\mu \partial^\mu \theta + (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) \ . \tag{2.77}$$

Der Massenterm für A^μ bricht die Eichsymmetrie.

2.8 Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen

2.8.1 Gruppen

Sei ein Paar $(G, *)$ mit einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verküpfung/Gruppenmultiplikation. $* : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$ heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind

1. Die Gruppe ist *abgeschlossen*. D.h. wenn $g, h \,\epsilon\, G \Rightarrow g * h \,\epsilon\, G$.
2. *Assoziativität:* $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.
3. $\exists$ *Einselement* e mit der Eigenschaft $g * e = e * g = g \ \ \forall\, g \,\epsilon\, G$.
4. Zu jedem g gibt es ein *Inverses* g^{-1} mit $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Abelsche Gruppe: Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn $g * h = h * g$.

Kontinuierliche Gruppen: Sie besitzen unendlich viele Elemente und werden durch n Parameter beschrieben. Bei *Liegruppen* ist n endlich. Alle einparametrigen Liegruppen sind abelsch. Typisches Beispiel: $U(1)$ mit den Elementen $e^{i\phi}$ und ϕ als Parameter.

2.8.2 Algebra

Ein linearer Raum (Vektorraum) wird zu einer *Algebra* $\mathbf{A}$, wenn eine binäre Operation (Multiplikation) zweier Elemente m, n existiert, so daß $mn \ \in \mathbf{A}$. Es gelten die Linearitätsbeziehungen $(k, m, n \ \in \ \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} k(c_1 m + c_2 n) &= c_1 km + c_2 kn \\ (c_1 m + c_2 n)k &= c_1 mk + c_2 nk \ . \end{aligned} \tag{2.78}$$

Dabei sind c_1, c_2 reelle (komplexe) Zahlen. Man spricht je nach Fall von reeller (komplexer) Algebra.

Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$mn = nm \ . \tag{2.79}$$

Sie heißt *assoziativ*, wenn

$$k(mn) = (km)n \ . \tag{2.80}$$

Sie heißt *Algebra mit Einselement*, wenn sie ein Einselement $\mathbf{1}$ besitzt mit

$$\mathbf{1}m = m\mathbf{1} = m \ . \tag{2.81}$$

Sei $\mathbf{A}$ eine *assoziative* Algebra mit Einselement und $B \subset \mathbf{A}$ eine Menge von Elementen b^1, b^2 etc. Die Algebra heißt von B *erzeugt*, wenn jedes $m \epsilon \mathbf{A}$ durch ein Polynom endlichen Grades in den Elementen b^i geschrieben werden kann,

$$m = c\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} c_{i_1 i_2 \ldots i_k} b^{i_1} b^{i_2} \ldots b^{i_k} \ , \tag{2.82}$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ komplexe Zahlen sind. Die Elemente der Menge B heißen *Generatoren* von $\mathbf{A}$. Das Einselement gehört nicht zu den Generatoren.

2.8.3 Clifford-Algebren

Eine Clifford-Algebra C_N wird von N Generatoren $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^N$ erzeugt, für die

$$\boxed{\xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a = 2\delta^{ab}}$$

mit $a, b = 1, ..., N$.

Die Dimension der Clifford-Algebra C_N ist 2^N. Es existiert ein enger Zusammenhang zwischen Clifford-Algebren und den Quantisierungsbedingungen für Fermionen.

Im allgemeinen lassen sich Clifford-Algebren für beliebige *symmetrische* Metriken g^{mn} definieren. So gilt insbesondere für die pseudoeuklidische Metrik

$$g_{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{N}, \underbrace{-1, ..., -1}_{M}) \ , \tag{2.83}$$

Clifford-Algebra $C_{N,M}$: $\{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}\mathbf{1}$.

Die Anzahl der Generatoren ist $d = N + M$.

2.8.4 Liealgebren

Eine Algebra ist ein Vektorraum, der von den Generatoren $A, B, C, ...$ aufgespannt wird: beliebige Linearkombinationen von Generatoren ergeben wieder Generatoren. Eine Algebra verfügt über ein *Produkt* zwischen den Generatoren. Im Fall der Liealgebra ist das Produkt der Kommutator

$$A \circ B := [A, B] \ , \tag{2.84}$$

mit den folgenden Eigenschaften

$$A \circ B = -B \circ A \tag{2.85}$$

$$(A \circ B) \circ C + (C \circ A) \circ B + (B \circ C) \circ A = 0 \ . \tag{2.86}$$

Liealgebren sind nicht assoziativ. Die Beziehung (2.86) heißt *Jacobi-Identität*.