Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 1

Ausgabe: Mi, 04.11.2020 – Besprechung: Fr, 13.11.2020

Aufgabe 1: Eigenschaften der δ-Distributionen

Die δ-Distributionen hat folgende Eigenschaften: $\int \mathrm{d}x f(x)\delta(x-a) = f(a)$.

(a) $\boxed{2\ \mathrm{P}}$ Zeigen Sie die Skalierungseigenschaft:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{1}$$

(b) $\boxed{2\ \mathrm{P}}$ Zeigen Sie:

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|} \quad , \tag{2}$$

wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1, \ldots, x_N$ besitzt.

(c) $\boxed{1\ \mathrm{P}}$ Zeigen Sie:

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{\delta\left(x-a\right) + \delta\left(x+a\right)}{2a} \tag{3}$$

für $a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(d) $\boxed{2\ \mathrm{P}}$ Berechnen Sie die "Ableitung der δ-Funktion"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) \tag{4}$$

Tipp: Benutzen Sie partielle Integration.

Aufgabe 2: Identitäten der Vektoranalysis

(a) $\boxed{5\ \mathrm{P}}$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind stetig differenzierbare Vektorfelder, s ist ein stetig differenzierbares Skalarfeld. Zeigen Sie die Gültigkeit von mindestens fünf der folgenden Identitäten:

$$i) \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\right) s = 0 \tag{1}$$

$$ii) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0 \tag{2}$$

$$iii) \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \nabla^2 \vec{a} \tag{3}$$

$$iv) \quad \vec{\nabla} \cdot (s\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} s + s \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \tag{4}$$

$$v) \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b}\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \vec{a}\left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right) \tag{5}$$

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass stets die Voraussetzungen für die Anwendung des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen erfüllt sein sollen. Des Weiteren erinnern Sie sich an die Beziehung:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Aufgabe 3: Gradient, Divergenz und Rotation

Es sei $\vec{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor, $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, und $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad}\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi$ für ein Skalarfeld $\varphi(\vec{x})$ mit:

$$i) \quad \varphi(\vec{r}) = r \tag{1}$$

$$ii) \quad \varphi(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} \tag{2}$$

$$iii) \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r^n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{R}_{>0}, r > 0 \tag{3}$$

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}\vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v}$ def folgenden Vektorfelder $\vec{v}(\vec{x})$:

$$i) \quad \vec{v}(\vec{r}) = \vec{r} \tag{4}$$

$$ii) \quad \vec{v}(\vec{r}) = r\vec{a} \tag{5}$$

$$iii) \quad \vec{v}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^n} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{R}_{>0}, r > 0 \tag{6}$$

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ der folgenden Vektorfelder $\vec{v}(\vec{x})$:

$$i) \quad \vec{v}(\vec{r}) = \vec{r} \tag{7}$$

$$ii) \quad \vec{v}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r} \tag{8}$$

$$iii) \quad \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -xz - 6y^2 \\ x^3 + 4yz^2 - 2xz \\ yz - 5y^2 z \end{pmatrix} \tag{9}$$