Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 10

Abgabe: Mi, 27.01.2021 – Besprechung: Fr, 29.01.2021

Aufgabe 1: Gaußsches Wellenpaket $\boxed{14\text{ P}}$

Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi_b(x) = [\pi b^2]^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right] \quad , \quad b > 0 \quad .$$

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Zeichnen Sie $\psi_b(x)$ für $b = 1$ cm und $b = 5$ cm. Berechnen Sie $\langle\psi|\psi\rangle$.

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Berechnen Sie $\langle\psi_b|X|\psi_b\rangle$ und die Ortsunschärfe ΔX im Zustand ψ_b.

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung sind definiert durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widetilde{\psi}(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} \; , \qquad \widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} \; . \tag{1}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation von $\psi_b(x)$. Was fällt Ihnen auf?

(d) $\boxed{3\text{ P}}$ Berechnen Sie $\langle\psi_b|P|\psi_b\rangle$ für den Impulsoperator $P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Berechnen Sie auch die Impulsunschärfe ΔP und das Unschärfeprodukt $\Delta X \Delta P$ im Zustand ψ_b.
(*Hinweis:* Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).)

(e) $\boxed{3\text{ P}}$ Die kinetische Energie eines (nichtrelativistischen) Elektrons mit Masse m wird durch den Operator $H_{\text{kin}} = \frac{P^2}{2m}$ beschrieben. Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie, $\langle E_{\text{kin}}\rangle = \langle\psi_b|H_{\text{kin}}|\psi_b\rangle$. Berechnen Sie die Unschärfe der kinetischen Energie, $\Delta E_{\text{kin}} = [\langle\psi_b|H^2|\psi_b\rangle - \langle E_{\text{kin}}\rangle^2]^{1/2}$, im Zustand ψ_b. Was passiert mit $\langle E_{\text{kin}}\rangle$ und ΔE_{kin}, wenn wir das Elektron immer weiter lokalisieren, also b immer kleiner wählen?

(f) $\boxed{2\text{ P}}$ Die nichtrelativistische Näherung bricht ungefähr dann zusammen, wenn $\langle E_{\text{kin}}\rangle = mc^2$ ist. Geben Sie den Wert b_{krit} an, bei dem dies der Fall ist. Aus der relativistischen Beziehung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \ldots$$

verschaffen wir uns den Operator der *relativistischen Korrektur*, $H^{\text{rel}}_{\text{kin}} = -P^4/(8m^3c^2)$. Berechnen Sie $\langle E^{\text{rel}}_{\text{kin}}\rangle = \langle\psi_b|H^{\text{rel}}_{\text{kin}}|\psi_b\rangle$ und zeichnen Sie (im

selben Koordinatensystem) $\langle E_{\text{kin}}\rangle/(mc^2)$ und $\langle E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}}^{\text{rel}}\rangle/(mc^2)$ als Funktion von b/b_{krit}.
Hinweis: Zur Berechnung von Integralen der Form $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n} e^{-\alpha x^2}$ mit $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ berechnen Sie zunächst $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}$ und differenzieren Sie dann nach α.

Aufgabe 2: Compton-Steuung $\boxed{\textbf{6 P}}$

Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\vec{p}_e'$ und Energie E_e'. Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α.

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

$$p_e = \begin{pmatrix} E_e/c \\ \vec{p}_e \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p_e' = \begin{pmatrix} E_e'/c \\ \vec{p}_e' \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma' = \begin{pmatrix} E_\gamma'/c \\ \vec{p}_\gamma' \end{pmatrix} ,$$

definieren. Die ungestrichenen (gestrichenen) Größen beschreiben dabei die Situation vor (nach) dem Stoß. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p_\gamma')^2$ und $(p_e - p_e')^2$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch E_γ, E_γ', α und die Elektronmasse m aus. Welche Beziehung besteht zwischen E_γ, E_γ' und α?

(b) $\boxed{3\text{ P}}$ Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden bzw. gestreuten Photons und $h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10}$ cm ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.