Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 11

Abgabe: Mi, 03.02.2021 – Besprechung: Fr, 05.02.2021

Aufgabe 1: Kastenpotential $\boxed{12\text{ P}}$

Betrachten Sie ein endliches Kastenpotential

$$V(x) = -V_0\,\Theta(a - |x|)\,, \qquad V_0 > 0\,.$$

(a) $\boxed{2\text{ P}}$ Aufgrund allgemeiner Überlegungen kann man zeigen, dass gerade ($\psi(x) = \psi(-x)$) und ungerade ($\psi(x) = -\psi(-x)$) Lösungen existieren. Geben Sie diese allgemeinen Lösungen mit unbestimmten Koeffizienten an. Beachten Sie die dabei die Normierbarkeit der Wellenfunktionen. Verwenden Sie die folgenden "Bausteine":

$$\cos(qx), \quad \sin(qx), \quad e^{\kappa x}, \quad e^{-\kappa x}\,.$$

(b) $\boxed{2\text{ P}}$ Lösen Sie die Schrödingergleichung und finden Sie die daraus folgenden Implikationen für q und κ.

(c) $\boxed{2\text{ P}}$ Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen an. Finden Sie die daraus folgende transzendente Gleichung zwischen κ und q. Formen Sie diese Gleichung in eine solche zwischen qa und ζ um, mit

$$\zeta \equiv \frac{\sqrt{2mV_0}a}{\hbar}\,.$$

(d) $\boxed{2\text{ P}}$ Betrachten Sie nun den Limes des unendlich tiefen Potentialtopfes $V_0 \to \infty$. Außerhalb des Topfes verschwindet die Wellenfunktion und wir haben $\psi(\pm a) = 0$. Geben Sie unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen die geraden und ungeraden Eigenfunktionen an.

(e) $\boxed{4\text{ P}}$ Berechnen Sie die Ortsunschärfe ΔX der Eigenfunktionen für den unendlich tiefen Potentialtopf.
Hinweise: Das Integral $\int_{-a}^{a} f(y)dy$ verschwindet, wenn $f(y) = -f(-y)$ ist. Weiterhin ist

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2y)\right)\,,$$
$$\cos^2 y = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2y)\right)\,.$$

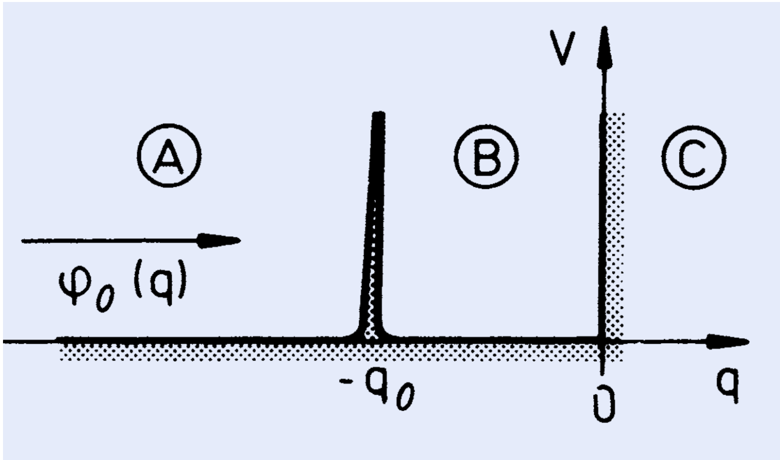
Aufgabe 2: Delta-Potential $\boxed{\textbf{12 P}}$

Eine (freie) Teichenwelle

$$\varphi_0(q) = \exp(ik_0 q)$$

laufe von $q = -\infty$ kommend gegen das eindimensionale Potential:

$$V(q) = \begin{cases} \frac{\hbar^2 v_0}{2m}\delta(q+q_0) & \text{für } q \le 0; \quad q_0 > 0, \\ +\infty & \text{für } q > 0. \end{cases}$$



(a) $\boxed{2\ \text{P}}$ Formulieren Sie passende Lösungsansätze der Wellenfunktion $\varphi(q)$ für die Bereiche A, B und C (Teilchenenergie $E > 0$; $k_0^2 = (2m/\hbar^2)E$).

(b) $\boxed{5\ \text{P}}$ Wie lauten die Anschlußbedingungen bei $q = 0, -q_0$? Legen Sie damit $\varphi(q)$ fest!

(c) $\boxed{3\ \text{P}}$ Bestimmen und diskutieren Sie für den Bereich A den Reflexionskoeffizienten.

(d) $\boxed{2\ \text{P}}$ Untersuchen Sie, für welche Werte des Wellenvektors k_0 die Aufenthaltswahrscheinlichkeitdicthe des Teilchens im Bereich B von v_0 und q_0 unabhängig wird.