

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 8

Abgabe: Mi, 13.01.2021 – Besprechung: Fr, 15.01.2021

Aufgabe 1: Rotierende Christbaumkugel

11 P

Eine Christbaumkugel vom Radius R trage auf ihrer Oberfläche, homogen verteilt, die Gesamtladung Q . Sie rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ um ihren Durchmesser.

- (a) 2 P Wie lautet die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel?
- (b) 4 P Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ und das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3r$$

der Kugel.

- (c) 5 P Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ innerhalb und außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dabei die Identität

$$\int \frac{\delta(r' - R) r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{4\pi R}{3r^2} r_{<}^3 \vec{e}_r,$$

$$\text{mit } r_{<} = \min(r, R) = \begin{cases} r, & \text{falls } r \leq R \\ R, & \text{falls } r > R \end{cases}.$$

Aufgabe 2: Wellengleichung

9 P

Fehlen Ströme und Ladungen, dann erfüllen in der Lorentz-Eichung skalares Potential $\varphi(\vec{r}, t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ im Vakuum die homogene Wellengleichung

$$\square \varphi(\vec{r}, t) = 0,$$

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0,$$

wobei $\square = \Delta - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)$.

- (a) 1 P Zeigen Sie, dass elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dieselbe Differenzialgleichung erfüllen.
- (b) 4 P Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t),\end{aligned}$$

- lösen die Wellengleichung. Welche Beziehung besteht dann zwischen ω und \vec{k} ? Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Vektoren \vec{k} , \vec{E}_0 und \vec{B}_0 !
- (c) 2 P Wie groß ist die Energiestromdichte (Energiefluss) $\vec{S} = 1/\mu_0 \vec{E} \times \vec{B}$ parallel bzw. senkrecht zu \vec{k} ?
- (d) 2 P Wie groß ist die Feldenergiedichte $w(\vec{r}, t) = 1/2 \epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + 1/(2\mu_0) \vec{B}^2(\vec{r}, t)$?