Wintersemester 2021/22
Theorie A - Blatt 10

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 20.12.21
Abgabe: Mo, 10.1.22
Besprechung: Fr, 14.1.22

Gesamtpunktzahl: **20P (25P)**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

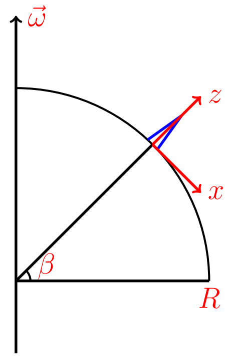
Vorleistungsanmeldung auf CAMPUS:
Die Anmeldung zur Vorleistung ist ab sofort auf
`https://campus.studium.kit.edu/`
unter der Prüfungsnummer 7800024 freigeschaltet. Jede(r) Student(in), dessen/deren Prüfungsordnung/Modulhandbuch die Vorleistung vorschreibt, muss sich dort bis zum 11.02.2022 um 14:00 Uhr anmelden. Danach werden von unserer Seite Ihre Vorleistungsresultate auf CAMPUS eingetragen (bestanden/nicht bestanden). Ihre Vorleistung bleibt auch für zukünftige Vorlesungen "Klassische Theoretische Physik I" gültig. Wenn Sie die Vorleistung erfolgreich gemeistert haben, können Sie sich im Anschluss für die Klausuren anmelden. Weitere Informationen hierzu folgen auf einem anderen Übungsblatt.

Kommentare zu diesem Übungsblatt:
Dieses Blatt bietet Ihnen die Option 25 Punkte zu sammeln, es werden aber nur 20 Punkte auf der Sollseite angerechnet. Sie haben also die Möglichkeit mit diesem Blatt zu überpunkten. Die Aufgaben 4 und 5 sind typische Klausur-artige Aufgaben, die Stoff der letzten Wochen wieder aufgreifen. Versuchen Sie diese weitestgehend unabhängig zu bearbeiten. (In der Klausur wird Ihnen ein selbstbeschriebenes DINA-4 Blatt als Hilfsmittel zur Verfügung stehen.)
Auch für dieses Übungsblatt wird die Musterlösung online zur Verfügung gestellt.

Wir wünschen frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2022!

Aufgabe 1: Scheinkräfte - Eiffelturm $\boxed{\textbf{7P}}$

An der Spitze des Eiffelturms in Paris (Höhe $h = 300\,\mathrm{m}$) ist ein Lot aufgehängt, das mit seiner Spitze den Boden im Punkt P berührt. O sei der Bodenpunkt, der auf der Verbindungslinie von der Turmspitze zum Erdmittelpunkt liegt. Der Erdradius sei R, die Erdachse sei $\vec{\omega}$ mit Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}| = 2\pi f$, und β sei der Breitengrad von Paris. Zahlenwerte: $R \approx 6.34 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \gg h$, $\beta \approx 49°$, $f = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s}}$



(a) $\boxed{\text{2P}}$ Wie weit ist P von O entfernt und in welche Richtung ist P gegenüber O verschoben? *Hinweis:* Legen Sie das lokale Koordinatensystem wie nebenstehend gezeigt. Drücken Sie zuerst den Betrag der Zentrifugalbeschleunigung durch ω, R und β aus.

Wir lassen nun einen Körper von der Turmspitze frei fallen. Der Körper erfahre während des Falls keine Reibungskräfte, falle also idealisiert im Vakuum.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Stellen Sie für den frei fallenden Körper die Bewegungsgleichungen in x, y und z-Richtung des lokalen Koordinatensystems auf.
Hinweis: Berücksichtigen Sie in der Coriolisbeschleunigung $\vec{b}_c$ nur die v_z-Komponente der Geschwindigkeit des Körpers.

(c) $\boxed{\text{3P}}$ In welcher Richtung und Entfernung vom Punkt O trifft ein von der Turmspitze aus losgelassener frei fallender Körper auf dem Boden auf? *Hinweis:* Lösen Sie zuerst die Gleichung für z und bestimmen Sie so $v_z(t)$.

Aufgabe 2: Anwendung des Nabla-Operators $\boxed{\textbf{5P}}$

In dieser Aufgabe untersuchen wird die Wirkung des Nabla-Operators

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$$

auf den Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ und dessen Betrag $r = |\vec{x}|$. $\vec{a}$ sei ein konstanter Vektor und $f(r)$ ist eine beliebige Funktion, die nur vom Betrag r abhängt.

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\varphi$ für die skalare Funktion $\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2 x_3$ in Richtung $\vec{a} = (1, 1, 1)$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Gradienten

$$\vec{\nabla} r, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r}, \quad \vec{\nabla} f(r).$$

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Divergenzen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x}, \quad \vec{\nabla} \cdot (r\vec{a}), \quad \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{x}).$$

Aufgabe 3: Gradient $\boxed{\textbf{3P}}$

Wir untersuchen zwei skalare Felder

$$\phi_1(\vec{r}) = e^{-r^2}\,, \qquad \phi_2(\vec{r}) = \frac{x}{r^2+a^2} \quad (a = \text{const})\,.$$

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ und $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$. Skizzieren sie das Feld $\vec{\nabla}\phi_1(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. $\vec{\nabla}\phi_2(\vec{r})$ kann als Summe $\alpha(\vec{r})\vec{e}_x + \beta(\vec{r})\vec{r}$ geschrieben werden. Skizzieren Sie die beiden Teilfelder in der x–y–Ebene.

Aufgabe 4: Typische Klausuraufgabe – Verständnisfragen $\boxed{\textbf{4P}}$

Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen in wenigen Sätzen oder mit wenigen Formeln:

(a) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors, dass $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ist, falls $\vec{a} = c\vec{b}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Gegeben sei eine Drehmatrix R sowie ein beliebiger Vektor $\vec{x}$. Welche der folgenden Eigenschaften sind für diese erfüllt? Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.
i) $R^T = R$, ii) $R\vec{x} = \vec{x}$, iii) $|R\vec{x}| = |\vec{x}|$,
iv) der i-te Spaltenvektor steht senkrecht auf den j-ten Zeilenvektor für $i \neq j$.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Wieviele Anfangsbedingungen sind notwendig, um eine Lösung der DGL $y''(x) = 5$ eindeutig zu bestimmen?

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Was zeichnet ein Inertialsystem aus?

Aufgabe 5: Typische Klausuraufgabe – Bahnkurve $\boxed{\textbf{6P}}$

Gegeben ist eine mit dem dimensionslosen Parameter t parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t + \sin t - t, \sqrt{2}\cos t - \sin t + t, \sqrt{2}\sin t + \sqrt{2}t\right).$$

Berechnen Sie

(a) $\boxed{\text{2P}}$ den Tangenteneinheitsvector $\vec{\tau}$,

(b) $\boxed{\text{1P}}$ die Länge $s(t)$ der Kurve vom Punkt $t = 0$ aus gemessen,

(c) $\boxed{\text{2P}}$ den Krümmungsradius R.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Welche Gestalt hat die Kurve?