Gesamtpunktzahl: 20P

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

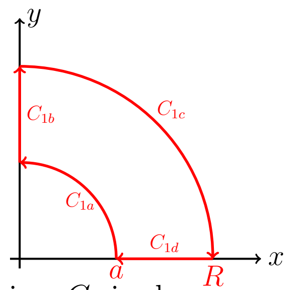
Aufgabe 1: Wegintegral 5P

Gegeben sei ein Kraftfeld in kartesischen Koordinaten ($\vec{r} = (x, y, z)^T$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)^T .$$

(a) 2P Zeichnen Sie das Kraftfeld in der x–y–Ebene. Können Sie dem Ursprung einen Vektor zuordnen? Berechnen Sie die Rotation.

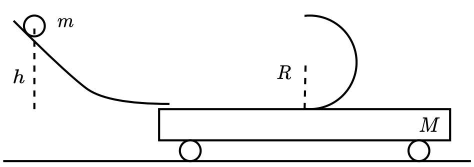
(b) 2P Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang des nebenstehenden Ringsegmentes C_1 im Uhrzeigersinn. Trifft dies ihre Erwartung entsprechend des Satzes von Stokes? *Hinweis:* Parametrisieren Sie das Ringsegment durch vier Parametrisierungen C_{1i} und addieren Sie die Ergebnisse. Je nach Wegstück bieten sich mal kartesische, mal Polarkoordinaten an.



(c) 1P Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang eines Kreises C_2 in der x–y–Ebene mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung gegen den Uhrzeigersinn. *Ohne Bepunktung:* Was läuft hier vermutlich schief?

Aufgabe 2: Halber Looping 6P

Ein kleines Objekt der Masse $m = 1\,\text{kg}$ wird aus der Höhe h auf einer schiefen Ebene losgelassen und gleitet ohne Reibung hinab. Die Rampe ist ohne Kanten mit der horizontalen Ladefläche eines Wagens der Masse M verbunden. Der Wagen besitzt in der Mitte eine halb-zylindrische Oberfläche mit Radius $R = 20\,\text{cm}$.
Das Objekt erreicht den höchsten Punkt des Halbzylinders und stoppt dort. Von dort aus fällt es vertikal im freien Fall herunter und berührt schließlich den Wagen genau an der Kante. Vernachlässigen Sie Reibung in diesem Problem.



(a) 3P Bestimmen Sie die Länge L des Wagens.

(b) 2P Wie groß ist die Masse M des Wagens?

(c) 1P Aus welcher Höhe h über der Ladefläche wurde das Objekt losgelassen?

Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe Erhaltungssätze. Eine weitere Gleichung erhalten Sie aus der Bedingung, dass die Geschwindigkeit des Objekts am obersten Punkt des Loopings verschwindet.

Aufgabe 3: Trigonometrische Identitäten $\boxed{3P}$

Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellung komplexer Zahlen folgende Identitäten:

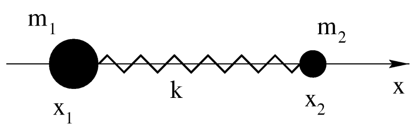
(a) $\boxed{1P}$ $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(b) $\boxed{1P}$ $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(c) $\boxed{1P}$ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$

Aufgabe 4: Molekülschwingung $\boxed{6P}$

Ein Molekül bestehe aus zwei ungleichen Punktmaassen m_1 und m_2, die sich entlang der x-Achse bewegen können und über eine masselose Feder (Federkonstante k, Ruhelänge a) verbunden sind. Die Koordinaten der beiden Massen seien x_1 und x_2:



(a) $\boxed{2P}$ Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Hierbei handelt es sich um zwei gekoppelte Differentialgleichungen, die sich *entkoppeln* lassen, indem wir $x_1(t)$ und $x_2(t)$ durch die Relativbewegung $x(t)$ und Schwerpunktsbewegung $X(t)$ ausdrücken, mit

$$x(t) = x_2(t) - x_1(t), \qquad X(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2}.$$

(b) $\boxed{3P}$ Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $X(t)$ und lösen Sie diese. *Hinweis:* Als Ansatz für $x(t)$ können Sie $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + c$ verwenden. Welche der Parameter A, ω, φ, c lassen sich nur durch Anfangsbedingungen festlegen?

(c) $\boxed{1P}$ Drücken Sie $x_1(t)$ und $x_2(t)$ durch $x(t)$ und $X(t)$ aus.