Wintersemester 2021/22
Theorie A - Blatt 13

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 24.1.22
Abgabe: Mo, 31.1.22
Besprechung: Fr, 4.2.22

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Bewegung im eindimensionalen Potential **6P**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential

$$V(x) = V_0 \left[(1 - e^{-\alpha x})^2 - 1 \right] .$$

Bei $t = 0$ sei die Anfangsgeschwindigkeit negativ, $\dot{x}(0) = -\dot{x}_0$, und das Teilchen bei $x(0) = 0$.

(a) 1P Skizzieren Sie das Potential.

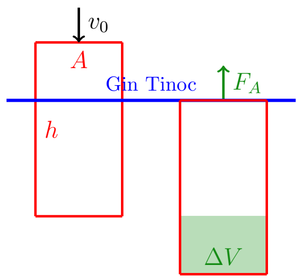
(b) 2P Im System stecke die Gesamtenergie E. Wie verläuft die Bewegung, wenn $-V_0 < E < 0$ gilt? *Hinweis:* Bestimmen Sie, an welchen Orten $\dot{x} = 0$ gilt und überlegen Sie, was dies für die Bahnkurve des Teilchens bedeuted.

(c) 2P Entwickeln Sie das Potential bis zur zweiten Ordnung in eine Taylorreihe um $x = 0$. Berechnen Sie aus dem entwickelten Potential die Kraft und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Lösen Sie die DGL und ermitteln Sie die Oszillationsfrequenz.

(d) 1P Was passiert qualitativ für $E = 0$ oder $E > 0$?

Aufgabe 2: Eiswürfel im Gin Tonic **5P**

Ein homogener quaderförmiger Eiswürfel der Masse m mit Querschnittsfläche A und Höhe h taucht in einen Gin Tonic der Dichte ρ zu zwei Drittel ein. Zur Zeit $t = 0$ wird der Eiswürfel kurz mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten angestoßen und schwingt sodann um die Gleichgewichtslage. *Hinweis:* Der Eiswürfel mit Lufteinschluss rotiere nicht und verliere weder an Masse noch an Form.



(a) 2P Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung des Schwerpunkts in geeigneten Koordinaten auf, wobei die Rückstellkraft durch die Auftriebskraft $F_A = -\rho g \Delta V$ und die schwache Reibungskraft durch $F_R = -kv$ gegeben ist. Geben Sie außerdem die Anfangsbedingungen an. *Hinweis:* Die Gravitationskraft ist bereits Teil von F_A, welche je nach Lage des Eiswürfels das Vorzeichen ändert.

(b) 3P Lösen Sie die DGL und bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Eiswürfels so, dass er beim folgenden ersten Eintauchen komplett im Gin Tonic untertaucht. Die Reibung sei schwach, d.h. $k < 2\rho g A$. *Hinweis:* $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ ist hilfreich.

Aufgabe 3: Drehimpuls des dreidimensionalen Oszillators $\boxed{\textbf{3P}}$

Wir betrachten den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit linearer Reibung, der der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \gamma\dot{\vec{r}}$ genügt. Zeigen Sie, dass das Drehmoment mit $\vec{F} = -k\vec{r} - \gamma\dot{\vec{r}}$ eine Funktion des Drehimpulses ist. Sie erhalten eine DGL. Lösen Sie diese und ermitteln Sie so den Drehimpuls als Funktion der Zeit.

Aufgabe 4: Getriebener Oszillator $\boxed{\textbf{6P}}$

Wir betrachten einen gedämpften harmonischen Oszillator, der durch eine periodische äußere Kraft getrieben wird,

$$\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \alpha \sin(\Omega t).$$

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differentialgleichung.
Hinweise: Ersetzen Sie zunächst in der Differentialgleichung $\sin(\Omega t)$ durch $e^{i\Omega t}$ und bestimmen Sie eine partikuläre Lösung dieser Gleichung mit dem Ansatz $x_{part}(t) = Ae^{i\Omega t}$, mit $A = |A|e^{i\delta}$. Wie erhalten Sie hieraus eine Lösung der ursrpünglichen Gleichung? Bei der homogenen Lösung der Gleichung genügt es, diese anzugeben, ohne zwischen starker und schwacher Dämpfung zu unterscheiden.

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Überprüfen Sie für $\rho = \frac{3}{2}\omega_0$, $\Omega = \frac{1}{2}\omega_0$ explizit, dass die in Aufgabenteil (a) bestimmte partikuläre Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie die Amplitude $|A|$ und Phasenverschiebung δ als Funktion von Ω und diskutieren Sie den Fall geringer Dämpfung.