Gesamtpunktzahl: **20P (25P)**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Nachfolgend folgen einige Hinweise zur An- und Abmeldung zu/von Klausuren:
Bitte vergessen Sie nicht sich zur Vorleistung (falls vom Studiengang vorgeschrieben) anzumelden. Dies ist möglich bis zum 11.2.2022 um 14:00 Uhr. Danach müssen Sie sich zu jeder Klausur, an der Sie teilnehmen möchten, ebenfalls auf CAMPUS online anmelden. Für die erste Klausur am 2.3.2022 ist dies möglich zwischen dem 15.2.22 und Donnerstag, dem 24.2.22 um 14:00 Uhr. Beachten Sie auch die offzielle Klausurausschreibung auf der Webseite. In der Woche vor der Klausur werden sowohl die Hörsaalbelegung (nach Nachnamen) sowie organisatorische Hinweise zur Klausur auf der Webseite bekanntgegeben.

Abmeldung/Rücktritt von Klausuren, zu denen Sie sich angemeldet haben:
Sie können sich bei Einhaltung der Fristen grundlos von der Klausur wieder abmelden. Dies geht für die erste Klausur online auf CAMPUS bis 28.2.2022 um 23:00 Uhr und dann noch persönlich mit Lichtbildausweis direkt vor Beginn der Klausur im zugeteilten Hörsaal. Sollten Sie krank sein und sich daher nicht persönlich von der Klausur abmelden können, können Sie (bis zum Klausurende) per Email an matthias.kerner@kit.edu von der Klausur zurücktreten. Der Rücktritt kann aber im Gegensatz zur Abmeldung nicht grundlos erfolgen, sondern muss schnellstmöglich (binnen der gleichen Woche) per (ärztlichem) Attest gerechtfertigt werden!

Nun geben wir noch einige Hinweise zu diesem Übungsblatt und zum Klausurinhalt:
Die Aufgaben 1 und 2 auf diesem Übungsblatt befassen sich mit neuen Konzepten. Beide Aufgaben sind recht umfangreich, die einzelnen Teilaufgaben lassen sich jedoch meist in wenigen Zeilen beantworten und sind größtenteils unabhängig voneinander lösbar. Die Aufgaben 3 und 4 sind nochmals klausurtypische Aufgaben und dienen der Wiederholung. Wie bereits auf Übungsblatt 10 gibt es auch hier wieder 25 Punkte, von denen nur 20 Punkte auf der Sollseite angerechnet werden.
Die Klausur selbst wird aus einer längeren Aufgabe mit Verständnisfragen (mit kleinen Rechnungen in ein oder zwei Zeilen) bestehen (siehe Blatt 10, Aufgabe 4). Diese Verständnisfragen decken ca. 30% der erreichbaren Punkte ab. Dazu gesellen sich weitere Aufgaben zu verschiedenen Themen, die in diesem Semester behandelt wurden. Als Hilfsmittel ist ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt. Sollten notwendige Formelzusammenhaïge in Vorlesung und Übung nicht behandelt worden sein, werden diese mit angegeben. Die Klausurbewertung orientiert sich am Abschneiden aller Teilnehmer/innen.

Wir hoffen, Sie haben aus der Theorie A viel mitgenommen, und wünschen viel Erfolg bei den anstehenden Klausuren und im weiteren Studium!

Aufgabe 1: Deltadistribution $\boxed{8P}$

Die Dirac'sche δ-Distribution (häufig auch δ-Funktion genannt) ist definiert über die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)\,.$$

Sie bildet eine (unendlich oft differenzierbare) Testfunktion $f(x)$ auf eine Zahl $f(0)$ ab. Ferner muss die Testfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty$ und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)x^n = 0$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllen.

(a) $\boxed{3P}$ Die δ-Distribution lässt sich nicht als gewöhnliche Funktion, aber als Grenzwert von Funktionenfolgen darstellen. Beispiele hierfür sind Folgen von Rechteckfunktionen $\delta_R(x)$ oder Lorentzfunktionen $\delta_L(x)$, gegeben durch

$$\delta_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{falls } |x| < \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \delta_L(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

mit $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass diese Funktionen die Eigenschaft

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_i(x) f(x) = f(0)$$

erfüllen. *Hinweis:* Entwickeln Sie $f(x)$ um $x = 0$ bis zur ersten Ordnung und substituieren Sie $z = \frac{x}{\epsilon}$.

(b) $\boxed{2P}$ Eine alternative Darstellung der Deltadistribution ist

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}.$$

Beweisen Sie diese Integraldarstellung, indem Sie zeigen, dass der Ausdruck

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} e^{-\epsilon|k|}$$

die Lorentzfunktionenfolge $g_L(x)$ aus Aufgabenteil (a) liefert.

(c) $\boxed{1P}$ Zeigen Sie, dass für beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x-a) = f(a) \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)}\ \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Anmerkung: Dies lässt sich auch verallgemeinern zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|},$$

wobei x_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind.

(d) $\boxed{1P}$ Die Ableitung der δ-Distribution ist definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta'(x) = -f'(0).$$

Begründen Sie diese Definition durch partielle Integration.

(e) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sin(x)\delta(x-\pi/2) \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\ln(\cos(x))}{e^{3x}}\delta(x).$$

Aufgabe 2: Fouriertransformation und Fourierreihe $\boxed{\textbf{9P}}$

Wie in der Vorlesung angedeutet lassen sich viele physikalische Probleme im Fourierraum einfacher lösen. Die Fouriertransformierte $\tilde{f}(k)$ der Funktion $f(x)$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F}[f] = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{-i\omega t}$$

mit der Rücktransformation

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}] = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}\,.$$

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie

(i)	$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]$	(ii)	$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)]$
(iii)	$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)]$	(iv)	$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)]$.

Hinweis: Nutzen Sie die Kenntnisse aus Aufgabe 1(b).

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Zeigen Sie die Relationen

$$\mathcal{F}[\dot{f}(t)] = i\omega \tilde{f}(\omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \tilde{f}(\omega).$$

Für periodische Funktion $f(t)$ folgt aus $f(t + T) = f(t)$ unter Anwendung der Relation von Aufgabenteil (b), dass $e^{-i\omega T}\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$. ω kann somit nur ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{T}$ annehmen. Nutzen wir diese Eigenschaft, lässt sich die Funktion $f(t)$ auch in eine Fourierreihe zerlegen gemäß

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_0^T dt' e^{-in\omega t'} f(t')\,.$$

(c) $\boxed{\text{3P}}$ Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten f_n folgender Funktionen mit Periode T, die für $0 < t < T$ gegeben sind durch

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < t < T/2 \\ 0 & \text{wenn } T/2 < t < T \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \frac{t}{T}.$$

Wir betrachten nun den harmonischer Oszillator, beschrieben durch die DGL

$$\ddot{x}(t) + 2\rho\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

mit periodischer Anregung $f(t) = f(t + T)$, die wir durch eine Fourierreihe ausdrücken können.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit dem Ansatz, dass sich auch $x(t)$ als Fourierreihe darstellen lässt. Sie können hierbei annehmen, dass Beiträge proportional zu $e^{in\omega t}$ mit verschiedenen n getrennt verschwinden müssen. *Hinweis:* Belassen Sie vorerst f_n im Ergebnis.

(e) $\boxed{\text{2P}}$ Setzen Sie nun f_n in das Resultat für die partikuläre Lösung ein und zeigen Sie, dass Sie dies auf die Form eines Faltungsintegrals bringen können:

$$x(t) = \int_0^T \chi(t - t') f(t') dt'$$

Wie lautet die Antwortfunktion $\chi(t)$?

Aufgabe 3: Typische Klausuraufgabe – Dragster $\boxed{\textbf{4P}}$

Wir betrachten ein Dragster Rennwagen mit Masse $m(t) = m_D + m_T(t)$, wobei m_D die konstante Masse des Autos und $m_T(t)$ die Masse des getankten Treibstoffs ist. Beim Beschleunigen verbrennt der Motor den Treibstoff mit einer konstanten Rate und erzeugt so eine konstante Schubkraft F_0. Für die Treibstoffmasse gilt dann $m_T(t) = m_0(1 - \frac{t}{\tau})$ für $0 \leq t \leq \tau$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steht der Dragster an der Startlinie bei $x(0) = 0$ und beginnt zu beschleunigen. Reibung sei vernachlässigt.

(a) $\boxed{2\text{P}}$ Finden Sie mit Hilfe des zweiten Newton'schen Gesetzes $\frac{dp(t)}{dt} = F$ die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ des Dragsters. Bringen Sie diese auf die Form

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\mu + v(t)}{\tau' - t}$$

und bestimmen Sie μ und τ'.

(b) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie $v(t)$ für $0 \leq t \leq \tau$ mit der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ mit Hilfe der Gleichung aus Teilaufgabe (a) und der Methode der Separation der Variablen.

Aufgabe 4: Typische Klausuraufgabe – Wegintegral $\boxed{\textbf{4P}}$

Gegeben sei das Kraftfeld ($\vec{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (by^2 - acx^2)\vec{e}_x + 2acxy\vec{e}_y + cz\vec{e}_z\,.$$

(a) $\boxed{1\text{P}}$ Welche Bedingung müssen Sie an die Konstanten a, b, c stellen, damit ein Potential $\phi(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ gilt? *Hinweis:* Nutzen Sie die Bedingung, um b zu eliminieren.

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Bestimmen Sie das zu $\vec{F}(\vec{r})$ zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ mit eliminierter Konstante b gemäß Teilaufgabe (a).

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie die im Kraftfeld (mit eliminierter Konstante b) verrichtete Arbeit entlang des direkten Weges von $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)^T$ nach $\vec{r}_2 = (1, 1, 0)^T$ und vergleichen Sie mit dem Potentialunterschied, den Sie mit Hilfe von Teilaufgabe (b) berechnen können.